

FRANCESCO MASI

LE NUOVE VEDUTE
NELLE
RICERCHE TEORICHE ED ESPERIMENTALI
SULL'ATTRITO

DETERMINAZIONE
DEL
VALORE INDUSTRIALE DEI LUBRIFICANTI

CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA



BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

FRANCESCO MASI

LE NUOVE VEDUTE

NELLE

RICERCHE TEORICHE ED ESPERIMENTALI SULL'ATTRITO

DETERMINAZIONE

DEL

VALORE INDUSTRIALE DEI LUBRIFICANTI

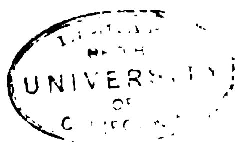
CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA





BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

INDICE



I

Cenni storici sull' attrito.

Le prime ricerche sull' attrito fra i corpi solidi sono dovute a Leonardo da Vinci [1]; siccome però l' opera di questo grande, nella quale è trattato tale argomento, rimase sconosciuta sino ai nostri tempi, così il merito di avere iniziato lo studio sull' attrito viene comunemente attribuito al francese Amontons [2]. In seguito si occuparono dell' attrito Parent [3], Leibniz [4], Camus [5], Leupold [6], Bülfinger [7], Desaguliers [8], Belidor [9], Musschembroek [10], Segner [11], Schober [12], Eulero [13], Fergusson [14] e Vince [15]; ma i risultati di tutti questi non furono

(1) Govi - *Saggio delle opere di Leonardo da Vinci.* Milano, 1872, pag. 17.
(2) *Mémoires de l'Ancienne Académie.* 1699
(3) *Histoire* e *Mémoires de l'Académie.* 1700-1704.
(4) *Miscell. Berol.* Tom. I, 1710.
(5) *Traité des forces mouvantes.* Paris, 1722.
(6) *Theatrum machinarum.* Leipzig, 1744.
(7) *Coment. Acad. Imp. Petrop.* T. II, 1727.
(8) *Course of experim. philos.* 1734.
(9) *Architectur hydraulique.* 1737.
(10) *Introductio ad philosophiam naturalem.* 1762.
(11) *De adfrictu solidorum.* 1758.
(12) *Versuch einer Theorie der Ueberwucht.* 1751.
(13) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* 1765.
(14) *Tables and traits for several arts and sciences.* 1767.
(15) *Cambridge Phil. Transact.*, Vol. LXXV, 1785.

concordi. Per la qual cosa nell'anno 1779 l'Accademia delle Scienze di Parigi stabilì un premio di L. 1000 pel miglior lavoro sulla resistenza nelle macchine. Il premio fu vinto dal capitano Coulomb, le cui esperienze segnano il punto di partenza dello studio pratico sull' attrito ([1]).

Coulomb esperimentò l' attrito di strisciamento o radente per mezzo di un piano orizzontale lungo 6 piedi (m. 2 circa), sul quale una slitta era tirata da una funicella che, passando per una girella, portava un piatto su cui venivano collocati dei pesi sino a raggiungere quello capace di spostare la slitta; questo peso dava la misura dell' attrito. Lasciava poi scorrere la slitta per l' intera lunghezza del piano, e con un orologio a mezzi secondi confrontava il tempo in cui la slitta percorreva la prima metà, con quello in cui percorreva l'altra metà del piano. Coulomb esperimentò pure l'attrito nei perni mediante una carrucola fissa, e tanto per l' una come per l' altra specie d' attrito stabilì le leggi seguenti:

1.° *L' attrito cresce colla scabrosità dei corpi.*

2.° *A parità delle altre circostanze l' attrito è proporzionale alla pressione normale.*

3.° *A pari pressione l' attrito è sensibilmente indipendente dalla estensione delle superficie a contatto.*

4.° *L' attrito al primo distacco è più grande che durante il moto, l' attrito radente è maggiore di quello dei perni, ed entrambi variano colla natura dei corpi e delle materie lubrificanti.*

5.° *Per taluni corpi l' attrito è indipendente dalla velocità, per altri cresce col crescere di questa, in una misura però che nella pluralità dei casi può essere trascurata.*

Ximenes ([2]) in Italia, nel 1782, ha pure eseguite esperienze d' attrito con apparecchi analoghi a quelli di Coulomb, ed in generale i risultati di questi due esperimentatori sono concordi: solo è da notarsi che secondo Ximenes il coefficiente d'attrito scemerebbe col crescere della pressione, qualche poco di più di quanto fu trovato da Coulomb.

([1]) *Mem. presentées à l'Académie.* Tom. X. Paris, 1785.

([2]) *Teoria e pratica delle resistenze dei solidi nei loro attriti.* Pisa, 1782.

Notevoli sono le esperienze d'attrito eseguite dall'ing. inglese Rennie ([1]) dal 1825 al 1829; il quale lasciando liberamente cadere un corpo lungo un piano inclinato, pervenne in generale agli stessi risultati di Coulomb; solamente con alcune eccezioni fra le quali la più importante è questa: che *pei corpi di natura fibrosa l'attrito cresce col crescere della estensione della superficie.*

Le esperienze di Coulomb furono eseguite in un intervallo di tempo molto breve, da uno a due secondi, e però lasciavano qualche incertezza: d'altra parte l'applicazione dei metalli nella costruzione delle macchine richiedeva la conoscenza di nuovi e più numerosi coefficienti d'attrito. A soddisfare questo bisogno della scienza e della pratica, dal 1831 al 1834, nuove e numerose esperienze furono eseguite dall'illustre generale Arturo Morin, uno dei grandi fondatori di quella scuola classica francese che alla teoria associando l'esperienza, tanto contribuì al progresso della Meccanica in Europa.

Morin ([2]) eseguì le sue esperienze d'attrito radente con un apparecchio analogo a quello di Coulomb, colla notevole differenza che il piano orizzontale era lungo 8 m., e la legge degli spazii descritti dalla slitta in funzione del tempo, veniva registrata per mezzo di un diagramma ottenuto automaticamente. In coteste esperienze la velocità massima fu di m. 3,50 e le pressioni variarono da K. 0,05 a Kil. 3 per centimetro quadrato. Morin fece pure speciali esperienze d'attrito nei perni, mediante un apparecchio analogo al suo dinamometro di rotazione, variando la natura delle superficie ed i carichi sino a 2000 Kilog. Tanto per l'attrito radente come per quello dei perni, confermò i risultati di Coulomb, e senza alcuna eccezione stabilì le seguenti leggi:

1.° *L'attrito durante il moto è direttamente proporzionale alla pressione normale.*

2.° *È indipendente dalla estensione della superficie.*

([1]) *Philosophical Transactions.* 1829.

([2]) *Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris. Recueils des savants étrangers;* vol. IV e V, 1833-1834. — *Leçons de mécanique pratique.* 1846.

3.° *Indipendente dalla velocità relativa delle superficie a contatto.*

4.° *L'attrito di primo distacco è maggiore che durante il moto.*

5.° *L'attrito dipende dalla natura e stato delle superficie a contatto.*

Le tabelle 1.ª e 2.ª porgono i principali coefficienti d'attrito determinati da Morin, la prima per superficie piane in moto l'una sull'altra, la seconda pei perni mobili nei loro cuscinetti.

Il fenomeno dell'attrito è assai più complesso di quello indicato da Coulomb e Morin. Il primo a svelare la vera natura di questa forza, che per tanto tempo si mostrò ribelle ai più chiari ingegni, fu Adolfo Hirn, colle sue importantissime esperienze pubblicate nei num. 128 e 129 del *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse, 1855* (1). Hirn studiò in particolar modo l'attrito mediato, cioè fra corpi separati da una materia lubrificante; ed eseguì le sue esperienze per mezzo di un apparecchio da lui denominato *bilancia d'attrito,* la quale essenzialmente altro non era che il freno dinamometrico di Prony. Cotesta bilancia consisteva in una puleggia cava del diametro di m. 0,230 e della larghezza di m. 0,220, mobile intorno al suo asse orizzontale; su di essa era appoggiato un cuscinetto semicilindrico, fissato ad una leva le cui braccia eguali erano di m. 0,562; alla estremità di una di queste braccia era applicato un piatto, su cui venivano posti dei pesi sino a raggiungere quello che metteva la bilancia in equilibrio, e dal quale si aveva la misura dell'attrito. La leva era perfettamente equilibrata da un contrappeso, e pesava 50 kilog. La parte inferiore della puleggia talora era immersa in un bagno d'olio per tutta la durata della esperienza: *lubrificazione abbondante.* Altra volta il bagno veniva tolto dopo un certo tempo che la puleggia era in moto, senza aggiungere altro olio per tutto il resto della esperienza: *lubrificazione ordinaria.* La temperatura dell'apparecchio potevasi mantenere costante per mezzo di una corrente d'acqua fredda circolante

(1) AD. HIRN - *Études sur le principaux phénomènes que présentent les frottements médiats ecc.* Egli ebbe a fratello Ferdinando Hirn che pel primo ideò ed applicò le trasmissioni telodinamiche.

nell'interno della puleggia, o variare mediante acqua calda, o lasciarla elevare naturalmente per mezzo del calore svolto dall'attrito: in ogni caso veniva misurata da un termometro applicato al cuscinetto presso la superficie della puleggia.

Con tale apparecchio Hirn scoprì innanzi tutto l'intima relazione fra l'attrito e la temperatura; ed anzi fu per questa via che, sebbene imperfettamente, arrivò alla scoperta dell'equivalente dinamico del calore. Hirn tenne conto non pure della temperatura nella misura dell'attrito, ma di tutte le altre circostanze da cui questo dipende, cioè: della velocità, della pressione e della quantità del lubrificante; e dalle numerose sue esperienze, eseguite colla massima cura e precisione, dedusse le seguenti leggi:

1.° *La quantità assoluta di calore sviluppato dall'attrito mediato è direttamente ed unicamente proporzionale al lavoro meccanico assorbito dall'attrito medesimo* [1].

2.° *Quando le superficie d'attrito sono abbondantemente lubrificate con buone qualità di olii, e la pressione non è tanto forte da espellerli dalle superficie stesse, inoltre la temperatura rimane costante, il coefficiente d'attrito è con sufficiente approssimazione proporzionale alla velocità.*

3.° *Quando le superficie d'attrito sono mediamente lubrificate, e tale è il caso più comune della pratica, e la temperatura è sensibilmente costante, con sufficiente approssimazione l'attrito può ritenersi proporzionale alla radice quadrata della velocità.*

4.° *Quando le superficie d'attrito sono asciutte, vale a dire l'attrito è immediato, l'influenza della velocità è nulla.*

5.° Infine, esperimentando col proprio dinamometro applicato ad una macchina MULE-JENNY, Hirn trovò che: *l'attrito mediato è molto sensibilmente proporzionale alla radice quadrata della superficie, che è quanto dire è inversamente*

---

[1] Questa non è che la prima legge della termodinamica: se non che Hirn trovò come rapporto costante fra il calore sviluppato dall'attrito e il lavoro corrispondente il numero 0,0027; onde l'equivalente dinamico del calore secondo Hirn risulta = 370 chilogrammetri invece di 425, come venne determinato da Joule ed è accettato dai fisici.

proporzionale alla radice quadrata della pressione specifica o sulla unità di superficie.

Le tabelle III, IV, V, VI e VII, danno i principali coefficienti d' attrito secondo le esperienze di Hirn.

Oltre le indicate leggi, Hirn mise pure in evidenza, pel primo, l' importantissima relazione esistente fra l' attrito e la fluidità o la viscosità dei lubrificanti, e trovò che: *tanto minore è l' attrito di un lubrificante quanto maggiore è la sua fluidità,* congiunta però a quel grado di coesione per la quale non venga espulso dalle superficie d' attrito. Da tale principio discende che l' acqua e l' aria dovrebbero essere lubrificanti della migliore qualità: ed infatti comunicando alla puleggia la velocità di 92 giri al 1', sì che questi due fluidi, impiegati rispettivamente come lubrificanti, non sfuggissero dalle superficie d' attrito, Hirn vide galleggiare la sua bilancia e trovò per essi coefficienti d' attrito piccolissimi. Per tener conto della viscosità dei lubrificanti Hirn fece uso di un viscosimetro della più semplice forma, cioè di un imbuto munito di piccolissima apertura, dalla quale a temperatura costante lasciava defluire una medesima quantità dei diversi lubrificanti: il tempo impiegato da ciascuno di questi a defluire totalmente dall' imbuto ne indicava la viscosità.

Infine Hirn stabilì una relazione fra l' attrito e la temperatura. Indicando con: A il coefficiente d' attrito corrispondente alla temperatura T_1, f quello ad un' altra temperatura T, ed a una costante, la relazione di Hirn viene espressa da:

$$f = \frac{A}{a(T - T_1)}.$$

Il numero a varia pei diversi olii, e per tutte le esperienze di Hirn è: $a = 1{,}0492$.

Come si vede da questi brevi cenni nulla è sfuggito ad Hirn; onde fa meraviglia come la memoria di questo insigne esperimentatore dai teorici e pratici non sia stata apprezzata quanto meritava; mentre per verità contiene i germi di tutto il progresso che dopo di lui si è venuto svolgendo in ordine all' attrito ed ai lubrificanti.

Nel 1860 l'ing. francese Bochet [1] eseguì esperienze d'attrito di strisciamento sopra un tratto di ferrovia, mediante vagoni le cui ruote, fissate per modo che non potessero ruotare, o munite di pattini rivestiti di diverse sostanze, strisciavano sulle rotaie. Dai suoi esperimenti Bochet dedusse la seguente formola:

$$f = \frac{K - \gamma}{1 + a\,v} + \gamma$$

nella quale f è il coefficiente d'attrito di strisciamento, v la velocità, a una costante che varia colla unità di misura della velocità, ed è $a = 0{,}30$ se v è espressa in metri; K e γ due coefficienti che dipendono dalle diverse sostanze, e che in media sono: per legno dolce, cuoio o guttaperca su rotaie di ferro asciutte e senza lubrificante, $K = 0{,}6$, $\gamma = 0{,}3$; per legni duri sopra rotaie di ferro, $K = 0{,}58$, $\gamma = 0{,}25$; per ferro ruvido sopra rotaie di ferro, $K = 0{,}40$, $\gamma = 0{,}10$; per ferro levigato su rotaie di ferro, K varia da 0,12 a 0,40, e γ da 0,08 a 0,12. Come si vede essendo γ minore di K, il coefficiente d'attrito scema col crescere della velocità, e solo raggiunge un valore costante per velocità grandissima.

Nel 1871 Quintino Sella [2], che alle solerti cure della patria associava sempre vivo l'amore per la scienza e per l'industria, presentava all'Accademia delle Scienze di Torino una interessante memoria sull'attrito, nella quale, dato conto delle esperienze da lui eseguite mediante due suoi speciali apparecchi denominati *tripsometri,* stabilì le seguenti leggi:

1.° *Fra gli stessi corpi l'attrito varia a seconda della nettezza delle superficie.*

2.° *Fra i limiti di velocità compresi fra zero e mezzo metro per 1″, l'attrito cresce col crescere della velocità.*

3.° *L'attrito varia nei cristalli a seconda della direzione in cui si esercita.*

---

(1) BOCHET - *Frottement de glissement.* Comptes rendus T. 46, 17; dic. 1860. — *Annales des Mines;* T. XIX, 1861, pag. 27. — *Annales des Ponts et Chaussées;* 1861, 4.ª serie, 1.° sem., pag. 205.

(2) *Ricerche sulla resistenza d'attrito.* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1861.

Notevoli sono le esperienze sull'attrito nei perni eseguite da Kirchweger in Hannover negli anni 1861-62 [1]. Per queste esperienze Kirchweger fece uso di una grossa bilancia d'attrito applicata sopra un asse di vagone ferroviario, messo in moto da una macchina a vapore. I perni di questo asse avevano 66 $^m/_m$ di diametro e 13,9 di lunghezza, le velocità furono di 10; 180; 360 giri al primo, le pressioni variabili fra 2,11 e 110,9 atmosfere. I risultati ottenuti da Kirchweger sono:

1.° *Con perni di acciaio o di ferro, con olio di colza o di coesione, con cuscinetti guerniti in metallo bianco, cioè: di una lega di rame, stagno e antimonio, ovvero di una lega di piombo e antimonio, il coefficiente d'attrito è compreso fra 0,0090 e 0,0099* [2].

2.° *Per cuscinetti di bronzo il coefficiente d'attrito è 0,0141* [3].

3.° *Il coefficiente d'attrito è indipendente dal carico e dalla estensione della superficie.*

4.° *Il coefficiente d'attrito è indipendente dalla velocità.*

5.° *La temperatura dell'aria esterna compresa fra* 25° e — 5° *R, non ha alcuna influenza sul coefficiente d'attrito.*

Le Tabelle VIII, IX, X, XI danno i principali coefficienti d'attrito ottenuti da Kirchweger.

Un altro esimio scienziato italiano, il colonnello Pietro Conti, nel 1874 pubblicava negli *Atti della R. Accademia dei Lincei* una interessante memoria intitolata, *sull'attrito,* nella quale sono esposte nuove ricerche dirette specialmente a verificare le leggi di Morin. Affine di operare colla massima precisione, il Conti eseguì le sue esperienze lasciando scorrere liberamente sopra un piano inclinato lungo 4 metri, un corpo abbandonato a sè stesso, e registrando la legge degli spazii in

---

(1) *Mittheilungen des Gewerbe* - Vereins für das KÖNIGR. Hannover, 1862.

(2) Il metallo bianco venne così composto: da prima si fecero fondere insieme 59 parti di stagno, 13 di antimonio e 9 di rame; poi 81 ½ parti di questa lega con 88 ½ di stagno. La lega di piombo e antimonio era composta di 85 parti di piombo e 15 di antimonio.

(3) Il bronzo venne composto di 20 parti di rame, 2 di stagno, 1 di zinco ed 1 di piombo.

funzione del tempo per mezzo di un ingegnoso apparecchio elettrico. Con tale procedimento il Conti pervenne alle seguenti leggi:

1.° *Il coefficiente d'attrito cresce col scemare della pressione specifica; l'accrescimento essendo assai grande per le superficie untuose, piccolo per le sgrassate.*

2.° *Cresce rapidamente col crescere della velocità, e dopo toccato un massimo che sta fra uno e due metri al secondo, scema con rapidità poco differente, in seguito di più in più lentamente.*

3.° *Quanto maggiore è la pressione specifica, tanto minore è la differenza tra il massimo ed il minimo, quando si passa per la stessa serie di velocità diverse.*

Ai risultati del Conti venne obbiettata la troppa delicatezza degli apparecchi [1]. Questa avrà certamente influito per mettere le esperienze del Conti in condizioni eccezionali, lungi da quelle che comunemente si verificano nella pratica; ma a questo esatto esperimentatore, rimane pur sempre il merito di avere posta in evidenza la natura del fenomeno, in un moto molto limitato nello spazio e nel tempo.

Galton e Westinghouse [2], intorno al 1878, studiando il modo di funzionare dei freni continui, pervennero a risultati molto interessanti sull'attrito a secco fra ruote con cerchioni d'acciaio e rotaie pure d'acciaio, e fra freni di ghisa e cerchioni di ruote pure in acciaio. La tabella A porge i coefficienti d'attrito ottenuti da Galton e Westinghouse per lo strisciamento a secco delle ruote sulle rotaie, e la tabella B i coefficienti d'attrito a secco fra freni di ghisa e cerchioni in acciaio.

---

(1) RICHELMY - Atti della *R. Accademia delle Scienze* di Torino, 1875.

(2) *Railroad Gazette*, 20 Sept. 1878. London, *Enginering*, 23 Aut. 1878.

Esperienze di Galton e Westinghouse

TABELLA A

Velocità media in Chilometri all' ora	Coefficienti d' attrito durante i tre primi secondi
16	0, 110
14	0, 087
40	0, 080
61	0, 057
72	0, 051
80,5	0, 040

TABELLA B

Velocità media		Coefficienti d' attrito fra i ceppi di ghisa dei freni e i cerchioni delle ruote			
in metri al secondo	in Kilom. all' ora	3 primi secondi	5 a 7 secondi	12 a 16 secondi	24 a 25 secondi
2, 1	8	0, 360	0, 209		
4, 2	16	0, 320			
10, 6	32	0, 205	0, 175	0, 218	0, 070
13, 1	48	0, 184	0, 111	0, 098	
17, 6	64	0, 134	0, 100	0, 080	
22, 2	80	0, 100	0, 700	0, 056	
26, 8	96	0, 062	0, 054	0, 048	0, 043

Da queste due tabelle deriva la importante conseguenza che: *l' attrito di strisciamento a secco e l' aderenza diminuiscono rapidamente col crescere della velocità.*

Dal 1883 al 1886 nuove ed importanti ricerche sono state fatte da Beauchamp-Tower in Inghilterra, Woodbury e da Thurston in America, rivolte specialmente a determinare l' influenza della pressione, della velocità e della temperatura sul coefficiente d' attrito.

Beauchamp-Tower [1], esperimentando mediante una specie di bilancia d'attrito, con velocità variabili fino a m. 2,39, con pressioni fino a 45 atmosfere, arrivò ai seguenti risultati:

1.° *Il coefficiente d'attrito fra superficie abbondantemente lubrificate è molto minore che fra superficie asciutte.*

2.° *A pari pressione la resistenza d'attrito cresce colla estensione della superficie; l'attrito a secco è indipendente dalla superficie.*

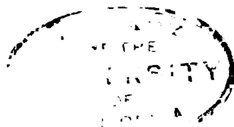
3.° *Per velocità comprese fra m.* 0,05 *e m.* 0,50 *al* 1″ *la resistenza d'attrito diminuisce, per velocità superiori a m.* 0,50 *cresce colla radice quadrata della velocità.*

4.° *Il coefficiente d'attrito cambia, con una certa approssimazione, proporzionalmente alla temperatura sopra zero.*

Oltre a ciò osservò che gli olii minerali pesanti possono sopportare una pressione di 40 kilog. per centimetro quadrato senza essere espulsi: per la qual cosa si può ridurre l'estensione della superficie di contatto del perno col cuscinetto, ed ottenere così una più facile circolazione del lubrificante. Osservò pure, mediante manometri, che la pressione del lubrificante interposto fra il perno e il cuscinetto, varia da punto a punto: è massima nella regione trasversale mediana del perno e scema rapidamente verso le estremità; e per ogni sezione trasversale diminuisce andando dalla generatrice più alta verso quelle di mezzo. Questa legge della variabile ripartizione della pressione dimostra che il coefficiente d'attrito nei perni non è costante per tutti i punti della superficie di contatto, come avviene per le superficie piane, ovvero come se il perno appoggiasse sul cuscinetto per una sola generatrice; onde il coefficiente d'attrito nei perni, considerato come il rapporto fra lo sforzo tangenziale per muovere il perno e la pressione normale, non è altro che un coefficiente medio, cioè quel tale coefficiente che se fosse comune a tutti i punti del perno, darebbe una resistenza totale d'attrito eguale alla effettiva.

---

[1] Engineering, 1883, 2.° sem., pag. 451; 1885, 1.° sem., pag. 150. *Dingler's Polytech. Journal,* vol. 225, 1885.



Woodbury a Boston ([1]) esperimentò con una macchina, simile all'antica macchina di Mac-Naugt per la prova dei lubrificanti, formata cioè di due dischi ruotanti l'uno sull'altro fra i quali era interposto il lubrificante; l'inferiore era messo in moto rotatorio da apposita puleggia, e il momento necessario per mantenere in equilibrio il superiore misurava il momento d'attrito: noto il quale, per mezzo della formola delle ralle, egli calcolava il coefficiente d'attrito. Colla velocità di metri 1,50 Woodbury trovò che: *a temperatura costante l'attrito scema col crescere della pressione, e a pressione costante scema col crescere della temperatura.*

Thurston ([2]) eseguì le sue ricerche mediante la macchina a pendolo conosciuta sotto il suo nome per la prova dei lubrificanti, e fatta costruire all'istituto tecnologico di Steven, da lui diretto, nel 1878. Essa essenzialmente consiste in un albero d'acciaio, mobile intorno al suo asse orizzontale, munito alla estremità di un perno, chiuso fra due cuscinetti di bronzo posti entro un telaio, il quale alla parte inferiore porta un peso a guisa di pendolo: in questo telaio apposita molla elicoidale mantiene il cuscinetto inferiore contro il superiore e ne misura la compressione. Facendo ruotare il perno per mezzo di apposita puleggia, il pendolo devia dalla verticale ed un indice da esso portato, scorrente sopra un arco graduato, segna in ogni istante l'angolo formato dal pendolo; dal quale angolo, dal peso del pendolo e dalla pressione della molla, si deduce il coefficiente d'attrito ([3]). Thurston esperimentando con velocità comprese fra m. 0,152 e m. 6,10 per 1″, e con pressioni fra 0,270 e 68 atmosfere, stabilì le seguenti leggi:

1.° *Il coefficiente d'attrito è prossimamente proporzionale alla radice quinta della velocità.*

([1]) Engineering, Dec. 1884. — *Zeitschrift deutscher Ingenieur* 1885.

([2]) Robert Thurston - *Friction and lubrication* - Études sur le frottement et le graissage des Machines - Traduction par M. B. revue par M. N. Jarry, 1887.

([3]) La macchina di Thurston è stata modificata da Westhoven, facendola doppia, vale a dire, ponendo a ciascuna estremità dell'albero rotante, due perni d'assaggio, coi quali si possono eseguire due esperienze per volta, ovvero paragonare l'olio da esperimentare con altro, preso come termine di confronto.

2.° *Il coefficiente d' attrito è inversamente proporzionale alla radice quadrata della pressione specifica o sulla unità di superficie.*

Onde indicando con v la velocità lineare alla periferia del perno, p la pressione specifica, f il coefficiente d'attrito, Thurston ha raccolto queste due leggi nella seguente formula:

$$f = a \frac{\sqrt[5]{v}}{\sqrt{p}}$$

nella quale il coefficiente a varia fra 0,02 e 0,03.

Per quanto riguarda l'effetto della pressione sulla resistenza d'attrito, le esperienze di Thurston confermano la legge di Hirn, ed hanno messo fuori di dubbio che aumentando il carico diminuisce la resistenza d'attrito; d'onde la convenienza nelle ferrovie di adottare i carri di grande portata, non solo per ridurre il peso morto del veicolo riferito alla unità del peso trasportato e la resistenza dell'aria riferita alla stessa unità; ma ancora per ridurre in pari tempo, e in modo molto sensibile, la resistenza unitaria dovuta all'attrito dei perni delle ruote nei loro cuscinetti.

Scaldando il perno con una lampada Bunsen, o lasciandolo naturalmente scaldare per attrito, Thurston studiò pure l'attrito in rapporto colla temperatura; e detta t la temperatura del minimo attrito, stabilì la seguente formula:

$$t = 15 \sqrt[3]{v}.$$

La tabella XII porge i principali coefficienti d'attrito determinati dal Thurston [1].

---

[1] Dalla tabella di Thurston, come anche da quelle di Kirchweger, si vede che per grandi pressioni i coefficienti di attrito nei perni sono molto minori di quelli dati dal Morin. Questa circostanza è stata pienamente verificata da chi scrive, in una esperienza eseguita nelle esercitazioni di Meccanica-Applicata alle Macchine presso la R. Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna nell'anno 1885, mediante un treno ferroviario, concesso alla detta scuola dal sig. comm. Lanino, direttore della Società per le S. F. Meridionali R. A. a Bologna, al quale qui rendo i dovuti e più sentiti ringraziamenti, per la squisita gentilezza con cui mise a disposizione della scuola non solo un ricco materiale,

Altri lavori sull'attrito sarebbero da citarsi, dei quali per brevità non terremo parola ([1]): uno però non può esser passato sotto silenzio per lo spirito pratico e speculativo a cui è informato, ed è quello del noto elettrotecnico Marcel Deprez, da lui pubblicato nei *Comptes Rendus* delli 17 Novembre 1884.

Volendo determinare il coefficiente d'attrito nei perni di un albero su cui erano calettati due grossi dischi facenti parte di una macchina destinata alle esperienze di trasmissione elettrica fra Creil e Paris, Deprez fece imprimere a questo albero una velocità di 600 giri al 1′, poi fatta scarrucolare la cinghia, notando i giri di 30 in 30 secondi, ebbe la legge del movimento secondo cui lo stesso albero si restituì al riposo, dalla quale calcolò il coefficiente d'attrito. I due dischi pesavano complessivamente 3500 Kilog., il loro diametro era di m. 1,10 e quello dei perni di m. 0,060. Dai risultati di codesta esperienza, consegnati nella memoria del Deprez, appare manifesto che il coefficiente d'attrito scema col scemare della velocità. Però Deprez non fece che una sola prova: sarebbe stato in vero desiderabile che egli avesse continuato in questo modo di esperimentare, variando le circostanze da cui dipende l'attrito,

---

ma ancora il sapiente personale tecnico della trazione. Queste esperienze vennero eseguite interponendo fra la locomotiva e il treno, composto di 6 carrozze di seconda classe, un dinamometro a trazione di Morin costruito da Clerk di Parigi. Correndo sopra un rettifilo orizzontale della lunghezza di metri 680, con velocità di m. 8,40 al 1″, ripetuta l'esperienza due volte, si trovò pel coefficiente medio di trazione 0,00250; essendo il raggio dei perni degli assi dei vagoni $\rho =$ m. 0,045 e il raggio delle ruote dei medesimi $R = 0{,}45$, assunto quale coefficiente d'attrito volvente fra ruota e rotaia, $\delta = 0{,}0005$, mediante la nota formola dei carri molto pesanti in confronto delle ruote, cioè:

$$T = \frac{P\,(f\,\rho + \delta)}{R}$$

si ottiene pel coefficiente d'attrito il valore

$$f = 0{,}0139$$

il quale, per causa della resistenza dell'aria e delle vibrazioni, sarà stato certamente maggiore del vero, ed è tuttavia notevolmente minore del minimo determinato da Morin.

([1]) M. RÜHLMANN - *Vorträge über geschicte der Technischen Mechanik.*

cioè, oltre la velocità, la pressione, la natura dei lubrificanti e la temperatura [1].

Nuove ricerche e nuovi studii sono stati fatti in questi ultimi anni sull'attrito, d'onde è venuto un vero e notevole progresso.

Innanzi tutto le numerose esperienze del Künkler [2] sulla viscosità od attrito interno dei liquidi, hanno messo in evidenza l'intima relazione fra l'attrito interno dei lubrificanti e l'attrito totale o cinetico; talchè quest'ultimo viene considerato siccome la resultante di tre specie d'attrito, cioè attrito esterno fra il lubrificante ed una delle superficie, attrito intermolecolare od interno del lubrificante, e attrito esterno fra il lubrificante e l'altra superficie. A meglio precisare l'azione idrodinamica dei lubrificanti entro gli spazi capillari esistenti fra le superficie d'attrito, grandemente contribuirono le famose leggi di Poiseuille sull'efflusso dell'acqua attraverso tubi capillari, dalle quali viene dedotta la formula dell'attrito interno dei liquidi, conosciuta sotto il nome di Poiseuille. Queste leggi e questa formola furono di grande utilità: primieramente perchè confermando le leggi di Newton sull'attrito dei liquidi negli spazii capillari, condussero a stabilire la teoria matematica dell'attrito; in secondo luogo perchè costituiscono il fondamento per la costruzione dei viscosimetri a tubo capillare, i quali al giorno d'oggi rendono così grandi servizi nello studio pratico dell'attrito.

D'altra parte le esigenze della meccanica moderna di richiedere macchine a grande velocità, di conservare inalterate più che sia possibile le superficie d'attrito, di ottenere la massima economia di lavoro, di combustibile e di materie lubrificanti; e più che tutto la comparsa nel commercio degli olii minerali russi quali lubrificanti a prezzo più conveniente dei grassi e degli olii animali e vegetali, ha dimostrato presso le amministrazioni ferroviarie e marittime e i grandi stabilimenti industriali, il bisogno di studiare l'attrito principalmente in rap-

---

[1] Tale desiderio fu vivamente espresso da Hirn nella sua nota: « *Notice sur les lois du Frottement* » - Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse, 1889.

[2] *Dingler's Polytechnisches Journal*, 1888.

porto alla lubrificazione: e a tale riguardo sono stati intrapresi due generi di ricerche, le une chimico-fisiche, le altre meccaniche. Le ricerche chimico-fisiche dei lubrificanti riguardano la purezza, la densità, la viscosità, l'essiccatività, l'adesività, l'acidità, la capillarità, l'infiammabilità, l'accensione ed il congelamento; per lo studio delle quali proprietà sono stati ideati metodi ed istrumenti speciali (1). Le ricerche meccaniche riguardano in generale la determinazione del coefficiente d'attrito totale degli olii, il modo di comportarsi di essi alle varie pressioni e velocità, le loro alterazioni, il loro consumo e i riscaldi; al quale scopo sono state inventate e costruite speciali macchine per la prova dei lubrificanti, fra le quali, oltre i diversi apparecchi accennati per la misura dell'attrito, sono da notarsi quelle di Mac-Naught, Naper, Ingham e Stapfer, o Bailley, Thurston (2), Hermann (3), le recenti della Ferrovia dell'Est (4), di Jähns (5), Martens (6), Dewrance (7), e quella recentissima di Kapff mossa direttamente da un motore elettrico (8).

---

(1) V. GIACOMO SILVOLA - *Sull'impiego dell'olio minerale,* 1887.

R. SÉGUÉLA - *Étude sur le graissage,* 1890.

RAINERI - *Manuale degli olii per la lubrificazione,* 1895.

ET. VERNY - *Appareils de Graissage des Machines et du Matériel - Roulant des chemins de fer.* 1893.

STEFANO PAGLIANI - Memorie diverse « *Sull'attrito interno dei liquidi* », 1887-1890.

GABBA - *Manuale di Chimica.*

G. OTTONE - *Giornale Scientifico di Palermo* - Aprile 1895.

J. GROSSMANN - *Die Schmiermittel,* 1885. Seconda Edizione, 1894.

(2) V. THURSTON, opera citata.

(3) *Zeitschrift d. Verein deut. Ing.,* 1883.

(4) « Machine a essayer les huiles ». *Revue Générale des chemins de Fer,* Décembre, 1889.

(5) *Organ für die Fortscritte Eisenbahnwesens,* 1888.

(6) *Mittheilungen der Königl. tec. Versuchsanstalten,* 1889. EERGÄNZUNGSEFT V.

(7) *Portefeuille économique des machines,* 1896. — *Note sur la construction et le graissage des coussinets des machines.* Comunication de M. J. DEWRANCE à la Société des Ing. civils de Londres.

(8) Dr. S. KAPFF. *Ein neuer Ooelprüfungsapparat-Baumaterialien Kunde.* 1897, N. 21-22.

Tali ricerche esperimentali, eseguite da una parte nei laboratori chimici e dall'altra nel campo vero delle macchine, costituiscono certamente un mezzo efficacissimo per lo studio pratico dell'attrito; ma al punto in cui siamo colla nostra rivista storica chiaro appare che le leggi sull'attrito, quali sono state formulate dai diversi esperimentatori, non sono ancora positive; manca qualche cosa che le coordini, manca la forma precisa della funzione rappresentatrice della resistenza e del coefficiente d'attrito. Questa funzione è stata stabilita, nel 1883, dal generale russo Petroff, nella sua nuova Teoria dell'attrito, coronata dal gran premio dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo. Il lavoro del Petroff è stato tradotto in tedesco, con molto vantaggio per la propagazione della scienza, dal sig. L. Wurzel (1), e qualche cenno di esso trovasi nei periodici nazionali ed esteri. Altri studi sperimentali sull'attrito furono fatti in seguito dal Petroff, i quali compiono e confermano i primi: talchè dal complesso di tutti questi, la scienza in oggi si trova in possesso di un nuovo indirizzo e di nuove cognizioni da cui la pratica ha certamente da avvantaggiarsi. Riassumere ordinatamente in un corpo solo gli studi teorici ed esperimentali del Petroff, esporre le nuove vedute e le idee che regolano al presente tutta la materia dell'attrito, mi sembra di qualche utilità, e forma l'oggetto del presente scritto: nel quale, come applicazione, viene inoltre esposto un metodo, che lo scrivente ritiene in molti casi utile, per risolvere una delle più importanti questioni che si agitano nella pratica, cioè la determinazione del valore industriale dei lubrificanti.

---

(1) *Neue Theorie der Reibung*, von PETROFF, UBERSETZT von L. WURZEL, 1887.

II

Attrito interno dei liquidi — Formola di Poiseuille — Viscosimetri.

L' esistenza dell' attrito intermolecolare od interno dei liquidi è provata da diverse osservazioni. Se si esamina il moto dell'acqua in un canale, si scorge che alla superficie le particelle liquide camminano con velocità differenti, generalmente decrescenti dalle sponde verso il mezzo; e se con opportuni istrumenti si esplora la velocità dei filetti liquidi alle diverse profondità, si trova che essa varia dalla superficie al fondo. Analogamente osservando il moto di una colonna liquida entro un tubo di vetro verticale, si vede che la superficie libera di essa è concava verso l' alto nel moto discendente, e diviene convessa nel moto ascendente. Lo stesso fenomeno si manifesta anche se il tubo è capillare, e lo provò Ducleaux [1] col seguente esperimento. Egli riempì la bolla di un termometro ed una parte del cannello con alcool colorato, indi versò alcool incolore; la superficie di separazione rimase piana: scaldò poscia la bolla e la stessa superficie divenne convessa verso l' alto. Adunque nel moto dei liquidi per entro canali e tubi di ampiezza ordinaria o capillari, esiste l'attrito interno. Osservando

---

[1] DUCLEAUX - « Écoulement de divers liquides au travers des éspaces capillaires ». *Annales de chimie et physique,* V. XXV, 1872.

poi che, a parità delle altre circostanze, la velocità dei liquidi varia colla natura delle pareti dei recipienti, si deduce ancora l'esistenza dell'attrito esterno.

Le leggi che regolano l'attrito dei liquidi variano a seconda dell'ampiezza dei condotti. Nei tubi capillari, che più interessano le nostre ricerche, l'attrito segue le leggi in parte date da Newton ed in parte da Dubuat, Gerstner, Girard e Poiseuille.

Le leggi di Newton sono:

1.° *L'attrito nei liquidi è proporzionale alla velocità relativa.*

2.° *È proporzionale alla estensione della superficie di contatto lungo la quale si considera.*

3.° *Varia colla natura del liquido.*

4.° *È indipendente dalla pressione.*

Dalle ricerche di Dubuat, Gerstner, Girard e particolarmente di Poiseuille, risulta:

5.° *L'attrito diminuisce col crescere della temperatura.*

Di queste leggi la prima, per le difficoltà che si presentano alla misura diretta e al calcolo della velocità relativa nei liquidi, da molti è stata messa in dubbio: tuttavia essa e le altre di Newton possono essere confermate dalle leggi esperimentali di Poiseuille sull'efflusso dell'acqua attraverso a tubi capillari, opportunamente confrontate coi risultati dell'analisi matematica: dal quale confronto deriva come conseguenza la celebre formola di Poiseuille, che nello stato attuale della scienza regola tutta quanta la materia dell'attrito interno dei liquidi.

Per confermare le leggi di Newton e giungere alla formola di Poiseuille, consideriamo il moto dell'acqua per entro un tubo circolare rettilineo, orizzontale, di diametro costante e piuttosto piccolo (tubo capillare), e poniamo le seguenti ipotesi:

1.° Tutte le particelle liquide camminino in linea retta parallela all'asse del tubo.

2.° Immaginando diviso il liquido in tanti strati cilindrici infinitamente sottili concentrici all'asse del tubo, tutte le particelle di ciascun strato abbiano la stessa velocità; gli strati del minor diametro si muovano più veloci di quelli del mag-

gior diametro, la velocità massima sia all'asse del tubo, la minima alle pareti.

3.° La pressione idrodinamica sia la stessa in tutti i punti di una sezione trasversale.

4.° Il moto di uno strato cilindrico, per attrito, sia accelerato dallo strato ad esso immediatamente interno e ritardato dallo esterno.

La prima e seconda ipotesi sono confermate dal fatto che se si mescolano all'acqua corpi pulverulenti di peso specifico eguale a quello dell'acqua stessa, questi si vedono muoversi in linea retta parallela all'asse del tubo, dividendosi in strati cilindrici, ed assumendo velocità decrescenti dalle pareti all'asse. Le stesse ipotesi trovano pure una conferma nell'altro fatto che la vena liquida uscente dalla estremità di un tubo è chiara e trasparente come cristallo, se il tubo è sufficientemente piccolo, la pressione e la temperatura non sono molto forti; mentre al contrario appare torbida e vorticosa nei tubi di diametro considerevole o sotto pressione e temperatura elevate. I citati fenomeni confermano pure la terza ipotesi, e cioè che nei tubi di piccolo diametro la pressione idrodinamica è la stessa in tutti i punti di una medesima sezione trasversale. Quanto alla quarta ipotesi, essa sarà da verificarsi insieme alle stesse leggi di Newton.

Ciò posto, siano $Oabx$, Fig. 1.ª, Tav. 1, l'asse del tubo, $cefmn$ un elemento infinitesimo del liquido, terminato da due porzioni di superficie cilindriche cn, fm concentriche all'asse del tubo ed infinitamente vicine, da due piani cm, fn passanti per l'asse e facenti tra loro l'angolo infinitesimo $d\varphi$, e da due altri piani cf, mn infinitamente vicini e normali all'asse del tubo. Siano poi $Oa = x$, $ab = dx$, $ce = dr$.

Le forze applicate all'elemento sono: la pressione idrodinamica agente su tutte le faccie dell'elemento, e le resistenze d'attrito sulle faccie cn, fm parallele all'asse del tubo. Indicando con p la pressione idrodinamica in un punto qualunque delle superficie aef, la pressione sulla faccia cf sarà:

$$(A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p\,r\,dr\,d\varphi$$

ed agirà da a verso b, il qual senso sarà preso come positivo.

Trascurando gli infinitesimi superiori al primo, la pressione sulla faccia mn sarà:

$$(B) \ldots\ldots \quad -\left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right) r\,dr\,d\varphi.$$

Consideriamo le altre forze parallele all' asse x. Movendosi l' elemento unitamente a tutto l' anello, le faccie cm ed fn non hanno alcun spostamento relativo; perciò su di esse non si sviluppa alcuna forza parallela all' asse.

Per causa dell' attrito interno, avendosi nei punti c ed e velocità differenti, le faccie cn ed mf avranno uno spostamento relativo. Indicando con u la velocità nel punto c alla distanza r dall' asse del tubo, la velocità nel punto e alla distanza $r + dr$ da c, trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al primo, sarà:

$$u + \frac{du}{dr}\,dr$$

e però la velocità relativa del punto e rispetto a c sarà:

$$\frac{du}{dr}\,dr$$

alla quale, per la 1.ª legge di Newton, sarà proporzionale la resistenza d' attrito sulla faccia cn: e siccome la stessa resistenza decresce colla distanza dall' asse, così essa sarà inversamente proporzionale a dr e però proporzionale al rapporto:

$$(C) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\frac{du}{dr}\,dr}{dr} = \frac{du}{dr}.$$

La resistenza d' attrito sulla faccia fm, alla distanza $r + dr$ dall' asse, colla approssimazione degli infinitesimi del 1.° ordine, sarà proporzionale a:

$$(D) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{du}{dr} + \frac{1}{dr}\,d\left(\frac{du}{dr}\right)dr.$$

Indichiamo con μ il coefficiente d' attrito interno del liquido, ossia quella forza d' attrito che si sviluppa per una velocità

relativa eguale ad uno, sopra una superficie pure eguale ad uno; allora la resistenza d'attrito sulla faccia cn sarà:

$$(E) \ldots\ldots\ldots\ldots \mu \frac{du}{dr} r d\varphi dx$$

e sulla fm

$$(F) \ldots \mu \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\right) dr\right] (r + dr)\, d\varphi dx.$$

Le quantità μ, r, $d\varphi$, dx sono positive, la velocità scema col crescere di r, quindi $\frac{du}{dr}$ per tutti i valori di r sarà negativa, e però i valori numerici delle formole (E) ed (F) saranno entrambi negativi. Considerando la forza d'attrito sulla faccia cn come acceleratrice dell'elemento, agirà da sinistra verso destra e sarà positiva; considerando la forza d'attrito sulla faccia fm come ritardatrice, agirà da destra verso sinistra e sarà negativa. Queste due forze in valore assoluto sono rappresentate rispettivamente dalle formole (E) ed (F), quindi volendo che queste formole esprimano in grandezza e senso quelle due forze, dovranno avere segni diversi; e siccome l'attrito sulla faccia cn agisce positivamente, così cambieremo segno alla (E) e lascieremo la (F) come si trova.

Ora essendo il moto del fluido uniforme, la somma algebrica di tutte le forze (A) (B) (E) ed (F) dovrà essere zero, e però sarà:

$$prd\varphi dr - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) rd\varphi dr - \mu \frac{du}{dr} rd\varphi dx$$
$$+ \mu \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\right) dr\right] (r + dr)\, d\varphi dx = 0.$$

Ordinando e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al terzo, sarà:

$$-\frac{dp}{dx} rdxd\varphi dr + \mu \left[\frac{du}{dr} + r \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\right)\right] dxd\varphi dr = 0.$$

Il fattore $dxd\varphi dr$ non potendo essere zero, e d'altra parte essendo:

$$\frac{du}{dr} + r \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\right) = \frac{d\left(r \frac{du}{dr} + C\right)}{dr}.$$

sarà:

$$(1)\ldots\ldots\ \frac{rdp}{dx} = \mu \frac{d\left(r\frac{du}{dr} + C\right)}{dr}$$

Abbiamo ammesso che la pressione idrodinamica p sia indipendente dal raggio r: però come risulta da diverse esperienze essa dipende da x ed è espressa dalla formola:

$$p = A - Bx$$

nella quale A e B sono due costanti ([1]).

Per tale valore di p la (1) diviene:

$$Brdr = -\mu\ d\left(\frac{rdu}{dr} + C\right).$$

Integrando fra i limiti $r = 0$ ed $r = r$, e supponendo μ costante, si ha:

$$\frac{Br^2}{2} = \mu\left(r\frac{du}{dr}\right)_{r=0} - \mu\left(r\frac{du}{dr}\right)_{r=r}$$

([1]) Questa espressione fu verificata dal DARCY mediante le osservazioni fatte in tre soli piezzometri; per avere una maggior precisione, vale la seguente tabella del LAMPE (*Der Civilingenieur*, 19, Bd. 1873) nella quale y rappresenta la pressione in colonna d'acqua, ed x la lunghezza del tubo ai punti osservati in piedi renani.

$y = 42{,}5913 + 0{,}016512\ x$
errori probabili: 0,0722; 0, 000046

Distanze x	Valori di y	
	osservati	calcolati
373, 06	48, 75	49, 14
455, 60	50, 11	50, 18
687, 37	53, 94	53, 85
766, 12	55, 24	54, 91
883, 34	57, 18	56, 88
1262, 93	63, 44	63, 29
1313, 40	64, 28	64, 05
1409, 14	65, 86	65, 85
1583, 77	68, 74	68, 93
1632, 12	69, 54	69, 67
1668, 09	70, 13	70, 40
1974, 17	75, 19	75, 13
2372, 96	81, 77	18, 95
2789, 81	88, 66	88, 39
2940, 01	91, 14	91, 18

Siccome per $r = o$, $\frac{du}{dr}$ non è infinito, così per $r = o$ sarà $\frac{rdu}{dr} = o$, e però l'espressione precedente diverrà:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \frac{du}{dr} = -\frac{B}{2\mu}r$$

Indicando con u_0 la velocità u corrispondente ad $r = o$, ed integrando sarà:

$$(3) \ldots\ldots\ldots u = u_0 - \frac{B}{4\mu}r^2$$

nella quale la velocità u_0 verrà determinata da quelle circostanze che debbono essere soddisfatte alla superficie di contatto dell'acqua col tubo.

Supponiamo che l'elemento fluido sia in contatto col tubo per la superficie fm, e sia ρ il raggio interno di esso, le pressioni sulle faccie cf ed mn saranno:

$$p\rho d\varphi dr; \quad -\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)\rho d\varphi dr.$$

Per determinare la forza applicata sulla faccia cn basterà porre nella (E) $(\rho - dr)$ in posto di r, e tenuto conto del segno, essa sarà:

$$-\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}(\rho - dr)\,d\varphi dx.$$

Indichiamo con U_ρ la velocità dell'acqua alla superficie di contatto del tubo, λ il coefficiente d'attrito esterno che si sviluppa fra l'acqua e il tubo, per una velocità eguale ad uno e sopra una superficie di contatto pure eguale ad uno. La forza d'attrito prodotta dalla parete del tubo sull'acqua in senso contrario al moto, sarà:

$$-\lambda U_\rho\, \rho d\varphi dx$$

essendo il moto del fluido uniforme la somma algebrica di tutte queste forze dovrà essere zero, onde avremo:

$$p\rho d\varphi dr - \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)\rho d\varphi dr -$$

$$-\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}(\rho - dr)\,d\varphi dx - \lambda U_\rho\, \rho d\varphi dx = o$$

dalla quale trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al secondo, si ha:

$$U_\rho = -\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}$$

sostituendo nella (3) questo valore in posto di u, ed in posto di r ponendo ρ, si ha:

$$-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho} = u_0 - \frac{B}{4\mu}\rho^2$$

e finalmente per la (2) essendo:

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho} = -\frac{B}{2\mu}\rho$$

si ha:

$$u_0 = \frac{B}{4\mu}\left(\rho + \frac{2\mu}{\lambda}\right)\rho$$

onde la (3) diviene:

$$(4) \ldots\ldots\ u = \frac{B}{4\mu}\left(\rho^2 + \frac{2\mu\rho}{\lambda} - r^2\right)$$

la quale dà la velocità di un punto qualunque del fluido scorrente entro il tubo.

Consideriamo ora una sezione anulare del tubo di raggio r ed $r + dr$, la velocità u in un punto di questa sezione sarà data dalla espressione precedente, e la quantità d'acqua che passa per la stessa sezione nella unità di tempo, sarà:

$$2\pi r u dr.$$

Indicando con Q la portata al 1″ della intera sezione del tubo, sarà:

$$Q = 2\pi \int_0^\rho r u dr$$

sostituendo per u il valore della (4) ed integrando, si ha:

$$(5) \ldots\ldots\ Q = \frac{\pi}{8}\frac{B\rho^4}{\mu}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right)$$

denotando con v la velocità media dell' acqua nel tubo sarà:

$$v = \frac{Q}{\pi\rho^2}$$

e quindi:

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad v = \frac{1}{8} \frac{B\rho^2}{\mu} \left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right).$$

Indicando ora con p la pressione idrodinamica ad una distanza x dall'origine del tubo, e con p_1 la pressione idrodinamica alla distanza $x + l$, avremo:

$$p = A - Bx$$
$$p_1 = A - B(x + l)$$
$$p_1 - p = Bl$$

detta p_o la differenza di pressione fra l'origine e la fine del tubo, sarà:

$$p_1 - p = p_o = Bl$$

da cui:

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad B = \frac{p_o}{l}.$$

Indicando poi con Δ il peso della unità di volume del liquido, e con h l'altezza di colonna dello stesso liquido capace di produrre la pressione p_o, sarà:

$$p_o = \Delta h$$

e quindi:

$$B = \frac{\Delta h}{l}.$$

Sostituendo questo valore nelle (5) e (6), avremo:

$$(8) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \dfrac{\pi \Delta h \rho^4}{8 l \mu} \left(1 + \dfrac{4\mu}{\lambda\rho}\right) \\ v = \dfrac{\Delta h \rho^2}{8 l \mu} \left(1 + \dfrac{4\mu}{\lambda\rho}\right) \end{array} \right.$$

Le quali danno la portata e la velocità media dell'acqua entro un tubo capillare, calcolata secondo le ipotesi stabilite e le leggi di Newton.

Confrontiamo le formole (8) coi risultati delle esperienze di Poiseuille [1]. Questo illustre scienziato francese, esperimentando

---

[1] POISEUILLE - *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides.* Mémoires presentés par divers savants. Institut Académie Royale des Sciences, V. IX.

sull'efflusso dell'acqua attraverso tubi capillari, pervenne alle seguenti leggi:

1.° *Ad una certa temperatura, le leggi del moto dell'acqua per entro tubi capillari variano col rapporto fra la lunghezza e il diametro dei tubi.* I rapporti $\frac{l}{d}$ fra la lunghezza e il diametro dei tubi di cui fece uso Poiseuille nella determinazione delle sue leggi, sono notati nella seguente tabella:

Denominazione dei tubi	Rapporti $\frac{l}{d}$
E	70
D	80
C	120
B	270
A	180
F	310

2.° *La portata* Q *per secondo di un tubo capillare, soddisfacente alle condizioni precedenti, è direttamente proporzionale alla pressione* p, *ed è esprimibile mediante la formula:*

$$Q = Kp$$

nella quale K in generale è una funzione del diametro, della lunghezza del tubo e della temperatura.

3.° *La funzione* K *non muta, tanto se il tubo versa nell'aria libera, come se è rigurgitato da altra acqua, la quale eserciti una contropressione:* in quest'ultimo caso, se il tubo è orizzontale, la pressione p è espressa dalla differenza fra la pressione all'origine e quella alla estremità del tubo.

4.° *La funzione* k *è espressa dalla relazione:*

$$K = K'' \frac{d^4}{l}$$

nella quale d è il diametro del tubo, l la sua lunghezza, K'' una quantità variabile colla temperatura.

Sostituendo questo valore di k nella espressione della portata, si ha:

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots Q = K''p\frac{d^4}{l}$$

la quale racchiude tutte le leggi di Poiseuille cioè: che sotto determinati rapporti fra la lunghezza e il diametro dei tubi, *la portata di un tubo capillare è:* 1.° *direttamente proporzionale alla pressione;* 2.° *alla quarta potenza del diametro;* 3.° *inversamente proporzionale alla lunghezza del tubo;* 4.° *è dipendente dalla temperatura.*

Per verificare il grado di esattezza della formola (10), Poiseuille esperimentò sopra sette tubi di diametri diversi e della lunghezza di 25 mm. con una pressione di 775 mm. di mercurio a 0°. Sostituendo nella (9) i valori osservati, calcolò per K'' i valori consegnati nella seguente Tabella:

Tabella C

Indicazione dei tubi	Diametro medio dei tubi in millimetri	Valori di K''
M	0. 013949	2495. 50
E	0. 029380	2496. 00
D	0. 043738	2494. 42
C	0. 085492	2496. 77
B	0. 113400	2496. 20
A	0. 141600	2492. 67
F	0. 652170	2495. 00

Da questa tabella Poiseuille dedusse, alla temperatura di 10° C, il valor medio:

$$K'' = 2495{,}224.$$

Confrontando questo valore con quelli della Tabella, si vede che i valori di K″ in essa notati, sono di 0,0006 più grandi e di 0,0010 più piccoli del loro valor medio. Queste grandezze essendo comprese nei limiti degli ordinari errori di osser-

vazione, può ritenersi che a temperatura costante K″ sia pure costante, e che quindi alla temperatura di 10° C, sia:

$$Q = 2495{,}224 \; p \, \frac{d^4}{l}.$$

In questa equazione Q rappresenta la portata del tubo capillare in millimetri cubi d'acqua, p, d, l, rappresentano la pressione in colonna di mercurio, il diametro e la lunghezza del tubo capillare in millimetri e a 0°. Se la pressione sarà espressa in millimetri d'acqua a 0°, essendo 13,576981 il peso specifico del mercurio, sarà:

$$Q = 183{,}783 \; p \, \frac{d^4}{l}.$$

Poiseuille ha pure determinata la relazione fra K″ e la temperatura t colla seguente formola:

$$K'' = 1836{,}724\,(1 + 0{,}0336793\,t + 0{,}0002209936\,t^2).$$

Sostituendo questo valore nella (9) ed esprimendo la pressione p in colonna d'acqua a 0°, si ha:

$$Q = 135{,}282 \left(1 + 0{,}0336793\,t + 0{,}0002209936\,t^2\right) \frac{d^4}{l}\, p.$$

L'esattezza di questa formola è dimostrata dalla seguente tabella, nella quale sono notate le portate Q in millimetri cubi d'acqua, ottenute da un tubo D avente il diametro di mm. 0,0440406 e la lunghezza di mm. 50,225 con una pressione di 776 millimetri di mercurio.

TABELLA D

Temperatura in C	Portata Q in millimetri cubi d'acqua al 1″	
	calcolata	osservata
5	0. 125324	0. 125388
10	0. 145072	0. 145031
15	0. 165998	0. 165468
20	0. 188105	0. 188328
25	0. 211391	0. 211371
30	0. 235856	0. 236241
35	0. 261501	0. 262411
40	0. 288326	0. 289335
45. 1	0. 316903	0. 316466

Come si vede da questa tabella la formola precedente è con grandissima approssimazione verificata: essa venne pure verificata anche per gli altri tubi; onde la formola di Poiseuille, relativa all'efflusso dell'acqua nei tubi capillari, rimane pienamente confermata dalla esperienza.

Possiamo dunque stabilire che secondo le esperienze di Poiseuille la portata e la velocità dell'acqua in un tubo capillare, sono espresse dalle formole:

$$Q = K'' \, p \, \frac{d^4}{l}$$

$$v = \frac{4K''}{\pi} \, p \, \frac{d^2}{l}$$

ed esprimendo il diametro per mezzo del raggio ρ del tubo, dalle:

$$(10) \ldots\ldots \begin{cases} Q = 16 \, \dfrac{K'' \, p \, \rho^4}{l} \\ v = \dfrac{16}{\pi} \, \dfrac{K'' \, p \, \rho^2}{l} \end{cases}$$

Confrontando ora queste equazioni colle (8) si vede chiaramente che, per quanto riguarda la pressione, il raggio, e la lunghezza del tubo, entro i limiti dei rapporti $\frac{l}{d}$ esperimentati dal Poiseuille, i risultati del calcolo concordano perfettamente con quelli della esperienza. Confrontiamo ora i coefficienti delle (8) e (10). Esprimendo nelle (10) la pressione in millimetri d'acqua, come nelle (8), ed eguagliando i due valori della portata Q, si ha:

$$16 \, K'' = \frac{\pi \Delta}{8\mu} \left(1 + \frac{4\mu}{\lambda \rho}\right)$$

la quale ci fa vedere che K'' è dipendente dal raggio ρ del tubo. Ora la tabella C dimostra che, sebbene di pochissimo, K'' varia col raggio del tubo: però, fra diametri variabili da mm. 0,013949 a mm. 0,65217 coll'approssimazione di 0,001, K'' può ritenersi costante; onde i coefficienti delle due formole concordano, purchè si attribuisca al termine:

$$\frac{4\mu}{\lambda \rho}$$

un valore così piccolo da essere trascurato.

Volendo tener conto delle variazioni di K'' rispetto al raggio del tubo, indichiamo con K_1'' il valore di K'' corrispondente ad un raggio qualunque ρ_1, allora sarà:

$$16\ K_1'' = \frac{\pi \Delta}{8 \mu}\left(1 + \frac{4 \mu}{\lambda \rho_1}\right)$$

e dividendo le due equazioni l'una per l'altra si ha:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{\rho}\left\{\frac{\frac{\rho}{\rho_1} - 1}{\frac{K_1''}{K''} - 1} - 1\right\}.$$

Dalla Tabella C si ha che il massimo rapporto dei raggi è:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 47$$

e il massimo rapporto dei coefficienti K_1' e K'' non è più grande di 1,001. Con questi valori dalla equazione precedente si ha:

$$\frac{4 \mu}{\lambda \rho} < \frac{1}{11500} < 0{,}0001.$$

Adunque, senza tema di sensibile errore, il termine $\frac{4 \mu}{\lambda \rho}$ a fronte della unità può essere trascurato; con che le formole (8) dedotte dal processo analitico esposto, restano pienamente confermate dalla esperienza. E siccome lo stesso processo è fondato sulle leggi di Newton e sulle ipotesi stabilite, così anche queste restano confermate dalla esperienza.

Indicando con p la pressione in milligrammi sul millimetro quadrato, q il volume d'acqua in millimetri cubi che sgorga dal tubo capillare in un tempo θ, sarà:

$$\Delta\ h = p\ ;\ Q = q\ \theta$$

onde trascurando il termine $\frac{4 \mu}{\lambda \rho}$ nella prima delle (8) ed introducendo il diametro d, si ha:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad q = \frac{\pi}{128}\, p\, \frac{d^4}{\mu\, l}\, \theta$$

la quale costituisce la celebre formola di Poiseuille. Potendosi poi ritenere che qualunque altro liquido si muova pressochè come l'acqua, essa viene generalizzata ed estesa a qualunque liquido.

Le esperienze di Poiseuille furono ripetute da altri: innanzi tutto da alcuni membri dell' accademia di Parigi i quali ottennero gli stessi risultati di Poiseuille; in secondo luogo dal dott. Jacopson di Königsberga ([1]), il quale esperimentò con tubi di rame aventi i diametri e le lunghezze seguenti:

$d =$ mill. 1.7538; $l =$ mill. 533,3 ÷ 518,2
$d =$ » 2.2940; $l =$ » 518,1 ÷ 437
$d =$ » 2.8656; $l =$ » 620,4

Jacopson applicò la formola

$$p = K \frac{l}{\rho^2} v$$

la quale corrisponde alla seconda delle (10); ed esperimentando a diverse temperature ottenne per K valori quasi identici a quelli che derivano dalla formola di Poiseuille. Anche presso di noi recentemente, il prof. Stefano Pagliani ([2]), esimio cultore degli studi sull' attrito interno dei liquidi, verificò le leggi di Poiseuille per tubi di diametri variabili fino a mill. 1,50.

Dalla (11) si ricava:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu = \frac{\pi}{128} \frac{d^4}{ql} p \theta.$$

Così espressa la formola di Poiseuille, forma la base su cui sono costruiti i più recenti e perfezionati viscosimetri, impiegati per la misura dell' attrito interno dei liquidi ed in particolare degli olii lubrificanti.

Molte sono le forme di viscosimetri che sono state ideate e costruite; le principali di esse si possono dividere in due specie, cioè: in viscosimetri a *deflusso semplice* e viscosimetri a *tubo capillare:* i viscosimetri della prima specie sono fondati

---

([1]) *Reicherts und Dub.* - Reymond's Arch. 1860, pag. 81.

([2]) Il prof. Pagliani ha trattato dell' attrito interno dei liquidi nei seguenti pregevolissimi lavori: *Sull' attrito interno dei liquidi*, note varie inserte *negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1885-1887. — *Sulla misura della viscosità dei liquidi.* Estratto dall' *Ingegnere Civile e le Arti industriali*, 1887. — *Apparecchio per la misura dell' attrito interno dei liquidi.* Stesso periodico, 1887. — *Sulla viscosità e potere lubrificante degli olii minerali. Enciclopedia chimica*, 1888-89-90.

sulla misura del tempo che, sotto una data temperatura, una certa quantità di liquido impiega a passare attraverso una apertura armata di imboccatura o di tubo addizionale; il liquido che impiega il minor tempo è il meno viscoso, dotato cioè di minore attrito interno: i viscosimetri della seconda specie riposano sul principio di far defluire, a pressione e a temperatura costanti, una certa quantità di liquido attraverso un tubo capillare, il quale soddisfi pienamente alle leggi di Poiseuille. Alla prima specie appartengono i viscosimetri di Vogel, Albrect, Vischer, Lepanau, Mason, Engler ed altri (1), alla seconda quelli di Petroff (2), Pagliani (3), Traube (4) ed Heen (5). I viscosimetri della prima specie non possono servire altro che per indicazioni grossolane; poichè nello stato attuale della scienza non si conosce la legge che regola l'efflusso da una semplice luce, imboccatura o tubo addizionale, in rapporto coll'attrito interno di un liquido: il solo criterio è la formola di Poiseuille, secondo la quale perchè il tempo possa servire come unica base per la determinazione della viscosità, innanzi tutto l'efflusso deve avvenire attraverso un tubo capillare, pel quale siano verificati speciali rapporti fra la lunghezza e il diametro, ed in secondo luogo la pressione deve essere costante; le quali condizioni non sono punto realizzate nei viscosimetri della prima specie. Al contrario i viscosimetri della seconda specie soddisfacendo in tutto alle leggi di Poiseuille, si possono applicare con sicurezza di ottenere risultati attendibili. Per questi viscosimetri la formola da applicarsi è la (12) la quale, indicando con K una costante dipendente dalle dimensioni del tubo capillare, posto

$$K = \frac{\pi}{128} \frac{d^4}{l}$$

diviene

$$\mu = \frac{K p \theta}{q}.$$

---

(1) I. GROSSMANN - Opere citate.

(2) P. VEROLE - Opera citata.

(3) PAGLIANI - Opere citate.

(4) I. GROSSMANN - Opere citate.

(5) PIERRE HEEN - *La Chaleur.* Liège, 1894.

Nell'applicazione di questa formola sarà opportuno aver presente che, se la pressione p è espressa in millimetri d'acqua, ed il volume q defluito nel tempo θ è espresso in millimetri cubici, μ risulta in milligrammi per millimetro quadrato o riferito alla massa di un millimetro cubo; e se p è espresso in centimetri, q in centimetri cubici, μ risulta in grammi per centimetro quadrato o riferito alla massa di un centimetro cubo.

III

Attrito totale o Cinetico — Formola di Petroff.

Consideriamo un cilindro pieno verticale di lunghezza indefinita ruotante intorno al proprio asse, entro un altro cavo concentrico, e lo spazio fra i due cilindri sia ripieno di un fluido il quale aderisca alle superficie dei due cilindri. Al moto del cilindro pieno si opporranno tre specie di resistenze cioè: l'attrito esterno del fluido sullo stesso cilindro pieno, l'attrito intermolecolare od interno del fluido e l'attrito esterno del fluido sul cilindro cavo: l'insieme di queste tre specie d'attrito costituisce la resistenza d'attrito totale o cinetico. Proponiamoci di determinare l'espressione analitica di questa resistenza e del coefficiente d'attrito.

Immaginiamo diviso il fluido in tanti strati cilindrici infinitamente sottili, concentrici ai due cilindri rigidi, e supponiamo che le particelle di ciascun strato si movano sopra circoli aventi il centro sull'asse di rotazione, con una velocità, la quale sia costante per ciascun strato e cambi da strato a strato. Supponiamo ancora che il cilindro pieno ruotando intorno al proprio asse, per attrito trascini in moto lo strato fluido con cui è a contatto, questo alla sua volta trascini l'altro strato vicino, e così il moto si propaghi a tutti gli strati del fluido; supponiamo infine che uno strato intermedio ad altri due, per attrito dallo interno sia accelerato e dallo esterno ritardato.

Sia, Fig. 2.ª Tav. 1., $a\,n\,d\,m^1\,c\,n^1\,b$ un elemento infinitesimo di uno strato qualsiasi del fluido; esso sarà terminato in alto ed in basso da due piani normali all'asse di rotazione, lateralmente dalle superficie cilindriche di due strati, e da due piani passanti per l'asse di rotazione e facenti tra loro un angolo infinitamente piccolo. Le superficie piane ac, bd, seguendo il moto generale di rotazione del sistema, non subiscono alcun spostamento relativo; perciò parallelamente ad esse non agisce alcuna forza. Le superficie cilindriche ab, cd, saranno animate dalla forza di attrito agenti tangenzialmente ad esse e normali all'asse di rotazione; delle quali forze quella applicata sulla faccia ab, giusta l'ipotesi fatta, avrà per effetto di accelerare il moto dell'elemento, e l'altra di ritardarlo. Le faccie laterali piane ad, bc, saranno sollecitate rispettivamente da due forze parallele ai loro piani; poichè se ciò non fosse per effetto delle forze tangenziali agenti sulle faccie cilindriche ab cd, l'elemento fluido ruoterebbe intorno ad un asse diverso da quello del cilindro, il che è contro l'ipotesi ammessa. Infine sulle faccie cilindriche ab, cd, e sulle ad, cb si eserciteranno pressioni normali alle faccie stesse, e su tutto l'elemento agirà la forza centrifuga.

Indichiamo con: r il raggio del cilindro interno, $r + dr$ quello dell'esterno, $d\alpha$ l'angolo formato dai due piani laterali, dz l'altezza dell'elemento, ossia la distanza dei due piani superiore ed inferiore, p la pressione normale alla superficie $a\,b$ in un punto qualunque a, u la velocità lineare di questo punto, Δ il peso della unità di volume del fluido.

La pressione normale alla faccia cd in un punto qualunque d della superficie cd, sarà:

$$p + \frac{dp}{dr}\,dr$$

e la forza centrifuga dell'elemento:

$$\frac{\Delta\, r\, d\alpha\, dz\, dr}{g} \cdot \frac{u^2}{r}.$$

Le pressioni in un punto qualunque delle superficie $a\,d$, ab saranno eguali, poichè esse hanno in comune il punto a; e

non variando coll'angolo $d\alpha$ la pressione in un punto qualunque della superficie ab, la stessa pressione avrà luogo anche sulla faccia laterale bc, e però le pressioni unitarie nelle tre superficie ab, ad, bc, saranno eguali.

Sia ω la velocità angolare del punto a alla distanza r dall'asse di rotazione, la velocità lineare di questo punto sarà

$$\omega r$$

La velocità lineare del punto d sarà:

$$\left(\omega + \frac{d\,\omega}{d\,r}\,d\,r\right)(r + d\,r).$$

La differenza di queste due velocità sarà:

$$\left(\omega + \frac{d\,\omega}{d\,r}\,d\,r\right)(r + d\,r) - \omega\,r = r\,\frac{d\,\omega}{d\,r}\,d\,r + \omega\,d\,r + \frac{d\,\omega}{d\,r}\,d\,r^2.$$

Il limite del rapporto di questa differenza a $d\,r$, al convergere di $d\,r$ verso zero, sarà:

$$\frac{r\,d\,\omega}{d\,r} + \omega.$$

Ora se il fluido non avesse attrito, ossia ruotasse come un anello solido, la differenza delle velocità dei punti b ed a sarebbe:

$$\omega\,(r + d\,r) - \omega\,r$$

e il limite del rapporto di questa differenza a dr, al convergere di dr verso zero, sarebbe ω. Sottraendo quindi ω dalla espressione precedente si avrà la velocità lineare relativa del punto a, dalla quale dipende l'attrito, cioè:

$$r\,\frac{d\,\omega}{d\,t} + \omega - \omega = r\,\frac{d\,\omega}{d\,r}.$$

Indicando con u la velocità lineare del punto a sarà:

$$u = \omega\,r$$

e quindi:

$$\frac{d\,u}{d\,r} = \omega + r\,\frac{d\,\omega}{d\,r}.$$

Posto in questa:

$$\omega = \frac{u}{r}$$

la velocità lineare relativa del punto a diviene:

$$(1) \ldots\ldots\ldots r\frac{d\omega}{dr} = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}.$$

Ritenendo che negli spazii capillari il moto dei fluidi sia regolato dalle leggi di Newton, giusta quanto si è detto nel capo precedente, l'attrito sarà proporzionale alla velocità relativa, alla estensione della superficie di contatto ed indipendente dalla pressione. Indicando quindi con μ il coefficiente d'attrito interno, la resistenza d'attrito sulla faccia ab dell'elemento sarà:

$$(L) \ldots\ldots \mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\,d\alpha\,dz$$

e sulla faccia cd sarà:

$$\mu\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)dr\right](r + dr)\,d\alpha\,dz$$

ossia:

$$\mu\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \left(\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{r\frac{du}{dr} - u}{r^2}\right)dr\right](r + dr)\,d\alpha\,dz$$

e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al terzo, sarà:

$$(M) \ldots \mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\,d\alpha\,dz + \mu\frac{d^2u}{dr^2} r\,dr\,d\alpha\,dz.$$

Supponiamo che la rotazione del fluido avvenga da sinistra verso destra, e le forze agenti in questo senso siano prese come positive. Considerando la forza d'attrito sulla faccia ab, come motrice, agirà da sinistra a destra e sarà positiva, e considerandola sulla faccia cd come resistente, agirà da destra a sinistra e sarà negativa. Ora siccome la velocità ω va diminuendo col crescere della distanza r, così il termine $\frac{du}{dr}$ sarà negativo, perciò le formole (L) ed (M) sono entrambe negative. Volendo quindi che queste formole esprimano in grandezza e senso le due forze applicate sulle faccie ab e cd, dovranno avere segni

differenti, e siccome la forza agente sulla faccia ab è positiva, così applicheremo il segno negativo alla (L) e lascieremo la (M) come si trova.

Quanto alle forze agenti sulle faccie ad, bc, osserviamo che tutte le particelle fluide distribuendosi in strati cilindrici, le forze radiali agenti sulle stesse faccie, saranno eguali; per conseguenza se una forza δ agisce sulla faccia di sinistra $amdn$, un'altra forza eguale agirà sulla faccia analoga di sinistra dell'elemento contiguo posto a destra, alla qual forza per reazione corrisponderà sulla faccia $nbm'c$ dell'elemento considerato, una forza eguale e contraria a δ.

Ora, se come si è supposto, l'elemento non può che ruotare attorno all'asse del cilindro, la somma algebrica dèi momenti di tutte la forze indicate, rispetto al centro di gravità G dell'elemento, dovrà essere zero.

I momenti delle pressioni normali alle diverse faccie dell'elemento e della forza centrifuga rispetto al punto G, sono nulli. Il momento della forza d'attrito sulla faccia ab si ottiene moltiplicando l'espressione (L) munita del segno negativo per $\frac{dr}{2}$, e quello della forza d'attrito sulla faccia cd, si ha moltiplicando l'espressione (M) per $\frac{dr}{2}$. La somma dei momenti delle forze δ agenti sulle faccie ad, bc, è:

$$\delta\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\alpha.$$

Eguagliando la somma di tutti questi momenti a zero, si ha:

$$\delta r d\alpha + \delta \frac{dr}{2} d\alpha = -\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r d\alpha dr dz$$
$$-\mu \frac{r}{2}\frac{d^2u}{dr^2} dr^2 d\alpha dz$$

da cui trascurando $\frac{dr}{2}$ a fronte di r, e gli infinitesimi d'ordine superiore al 3.°, si ha per la forza δ agente sulla faccia ad da G verso O:

$$(N) \ldots\ldots\ldots -\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr dz$$

e per quella sulla faccia cb da O verso G.

$$(O) \ldots\ldots\ldots \mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) drdz.$$

Proiettiamo ora le diverse forze secondo la retta AA condotta per G tangente il circolo descritto da questo punto, nel moto attorno all'asse OO.

Le proiezioni delle pressioni normali alle faccie ab, dc e della forza centrifuga sono nulle. La proiezione della forza d'attrito sulla faccia ab è data dalla espressione (L) col segno negativo, e quella della forza d'attrito sulla faccia dc è data dalla espressione (M). Per calcolare le proiezioni delle forze δ, basta moltiplicare cadauna di queste per $sen\ \frac{d\alpha}{2}$ che, coll'approssimazione degli infinitesimi del secondo ordine, può ritenersi eguale a $\frac{d\alpha}{2}$, la quale quantità è positiva per l'arco a destra di G ed è negativa per quello a sinistra.

Il fluido movendosi per strati cilindrici paralleli, la somma di tutte queste proiezioni dovrà essere zero, quindi si avrà:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

da cui integrando si ha:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots u = \frac{C}{r} + C^1 r$$

nella quale le costanti C e C^1 si determineranno note le condizioni particolari delle superficie di contatto del fluido.

Nel caso che l'elemento fluido sia in contatto con uno dei cilindri rigidi, per determinare le condizioni di equilibrio dell'elemento, si procederà nel modo seguente. Siano: r_2 il raggio del cilindro rigido cavo, U_2 la sua velocità lineare, u_2 la velocità dello strato fluido che gli è ad immediato contatto. Il fluido strisciera sulla superficie del cilindro cavo colla velocità:

$$u_2 - U_2.$$

Indicando con λ_2 il coefficiente d'attrito esterno, cioè del fluido colla parete del cilindro cavo, l'attrito sulla faccia dc sarà:

$$\lambda_2\,(u_2 - U_2)\, r_2 d\alpha dz.$$

La forza d'attrito sulla faccia dc agisce in senso contrario al moto, perciò questa espressione sarà negativa; ma se il cilindro cavo è trascinato dal fluido, sarà:

$$U_2 < u_2$$

e però la forza d'attrito agente sulla faccia dc, in grandezza e senso, sarà espressa da:

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) \, r_2 d\alpha dz.$$

I valori delle forze agenti sulle faccie ab, ad, bc si avranno sostituendo nelle formole (L), (N) ed (O); $r_2 - dr$ in luogo di r, e trascurando gli infinitesimi del 3.° ordine.

Le somme delle proiezioni di tutte queste forze, stimate secondo la tangente al circolo descritto dal punto G, dovendo essere zero, risulta:

$$\lambda_2 \left(U_2 - u_2\right) = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r = r_2}$$

dalla (2) si ha:

$$(3) \, \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{C}{r^2} + C^1 \\ -\frac{u}{r} &= -\frac{C}{r^2} - C^1 \end{aligned} \right.$$

onde.

$$(4) \, \ldots\ldots \, \lambda_2 (U_2 - u_2) = -2\mu \frac{C}{r_2^2}.$$

Analoghe considerazioni conducono a stabilire le condizioni di equilibrio dell'elemento supposto a contatto col cilindro rigido pieno per la faccia ab. Siano: r_1 il raggio del cilindro interno, U_1 la velocità lineare di esso considerata positivamente, u_1 la velocità dello strato fluido da esso trascinato, λ_1 il coefficiente d'attrito esterno cioè del fluido col cilindro pieno. La forza d'attrito sulle superficie ab diretta da sinistra verso destra, sarà:

$$(5) \, \ldots\ldots\ldots \, \lambda_1 (U_1 - u_1) \, r_1 d\alpha dz.$$

Per determinare le forze agenti sulle faccie dc, ad, bc, basterà sostituire nelle formole (L), (N) ed (O), $r_1 + dr$ in

luogo di r. È però da notarsi che in questo caso la (L) esprime una forza agente da destra verso sinistra ossia negativa, perciò essa dovrà conservare il proprio segno.

Eguagliando a zero la somma delle proiezioni di tutte queste forze secondo la retta $A\,A$, risulta:

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) = -\mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r = r_1}$$

e per la (2):

$$(6) \ldots\ldots\ldots \lambda_1 (U_1 - u_1) = 2\mu \frac{C}{r_1^2}$$

dalla (2) si ha poi:

$$u_2 = \frac{C}{r_2} + C^1 r_2$$

$$u_1 = \frac{C}{r_1} + C^1 r_1$$

sostituendo questi valori nelle (4) e (6), si ha:

$$U_2 = C\left(\frac{1}{r_2} - \frac{2\mu}{\lambda_2 r_2^2}\right) + C^1 r_2$$

$$U_1 = C\left(\frac{1}{r_1} + \frac{2\mu}{\lambda_1 r_1^2}\right) + C^1 r_1$$

dalle quali si ricava:

$$(7) \ldots C = \frac{r_1^2 r_2^2 (U_1 r_2 - U_2 r_1)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}$$

$$(8) \ldots C^1 = \frac{r_2^2\, U_2\left(r_1 + \frac{2\mu}{\lambda_1}\right) - r_1^2 U_1 \left(r_2 - \frac{2\mu}{\lambda_2}\right)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}$$

sostituendo questi valori nella (2), avremo la velocità lineare di un punto qualunque del fluido.

Per verificare il grado di esattezza della formola (5) e per conseguenza l'ipotesi su cui è fondata, facciamo la somma di tutti i momenti delle forze d'attrito agenti sulla superficie del cilindro pieno e confrontiamola col risultato della esperienza.

Per un elemento infinitesimo di questa superficie la forza d'attrito è data dalla (5), la quale in virtù della (6) diviene:

$$2\mu \frac{C}{r_1} d\alpha dz$$

il suo momento rispetto all'asse del cilindro, sarà:

$$2\mu C d\alpha dz.$$

Integrando questa espressione rispetto ad α fra i limiti 0 e 2π, e rispetto a z fra i limiti $z = 0$, e $z = h$, denotando con h la lunghezza del cilindro, e con M il momento cercato, sarà:

$$M = 4\mu\pi h C$$

e sostituendo per C il valore dato dalla (7), si ha:

$$M = 4\mu\pi h \frac{r_1^2 r_2^2 (U_1 r_2 - U_2 r_1)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}.$$

Essendo, come d'ordinario, il cilindro cavo fisso, sarà $U_2 = 0$ e però si avrà:

$$(9) \ldots M = 4\mu\pi h \frac{r_1^2 r_2^3 U_1}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}.$$

Mediante una serie di esperienze fatte a diverse velocità U_1, e con cilindri di diametri differenti, paragonando questo momento alla somma dei momenti delle forze esterne che fanno ruotare il cilindro pieno, si determineranno i valori di λ_1 λ_2 e μ, e si potrà così verificare l'esattezza della ipotesi stabilita. Restringendoci però al caso che lo spazio fra i due cilindri sia capillare, pel quale si possono ammettere le leggi di Newton, con sufficiente approssimazione la formola (9) potrà essere applicata, purchè la differenza

$$r_2 - r_1 = e$$

sia molto piccola. In tal caso trascurando le potenze di e superiori alla prima sarà:

$$r_2^2 = r_1 (r_1 + 2e); \quad r_2^3 = r_1^2 (r_1 + 3e)$$

onde per la (9) il momento d' attrito sarà:

$$M = \mu 2\pi h \frac{r_1^2 (r_1 + 3e)\, U_1}{(r_1 + e)\, e + \mu \left(\frac{r_1 + 3\,e}{\lambda_1} + \frac{r_1}{\lambda_2}\right)}$$

e trascurando $3e$ a fronte di r_1 sarà:

$$M = \mu\, r_1 \frac{2\,\pi\, r_1\, h\, U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}.$$

Indichiamo ora con F la resistenza d' attrito fra i due cilindri, Q la totale superficie di contatto del cilindro interno, sarà:

$$M = F\, r_1; \quad Q = 2\,\pi\, r_1\, h.$$

Sostituendo questi valori nella espressione precedente si ha:

$$(10) \ldots\ldots\ F = \mu \frac{Q\, U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}$$

la quale è l'espressione analitica della resistenza d'attrito e costituisce la formola di Petroff. Essa stabilisce le seguenti leggi: *a temperatura costante del fluido lubrificante la resistenza d' attrito totale è direttamente proporzionale:*

1.° *Al coefficiente d' attrito interno del lubrificante;*

2.° *Alla estensione della superficie di contatto;*

3.° *Alla prima potenza della velocità relativa;*

4.° *È inversamente proporzionale alla somma di tre termini cioè: lo spessore dello strato lubrificante, e i due rapporti fra il coefficiente d' attrito interno del lubrificante e quello esterno, da una parte col cilindro pieno e dall' altra col cilindro cavo.*

A seconda dell' influenza che ha l' attrito interno sullo esterno, dalla formola (10) come casi particolari derivano altre due. Se l' aderenza del fluido alle pareti solide è grande in confronto del suo attrito interno, talchè lo spessore e riesca notevolmente più grande della somma:

$$\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$$

Allora questa può trascurarsi, e la (10) diviene:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{\mu\, Q\, U_1}{e}$$

ed in questo caso la *resistenza d' attrito è inversamente proporzionale allo spessore dello strato lubrificante.* Al contrario se la viscosità o l' attrito interno del fluido è sufficientemente grande, perchè e sia trascurabile a fronte della somma:

$$\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$$

allora con sufficiente approssimazione la (10) diviene

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{Q\, U_1}{\frac{1}{\lambda^1} + \frac{1}{\lambda_2}}$$

e se i due cilindri sono dello stesso materiale, sarà:

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

e si avrà:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{\lambda}{2}\, U_1\, Q.$$

La formola (10) e quelle che da essa sono state dedotte, riposano sopra ipotesi che non possono essere pienamente realizzate nella pratica. Si è ammesso che i due cilindri siano di lunghezza indefinita e verticali, che il fluido aderisca egualmente su tutta la lunghezza dei due cilindri, che abbia una perfetta continuità, che la temperatura sia costante durante tutto il moto e in tutti i punti delle superficie d'attrito, e che costante sia pure lo spessore dello strato lubrificante. Ora nella pratica i cilindri sono di lunghezza limitata da appositi colletti, e sono molto spesso orizzontali, l'aderenza del fluido non è eguale per tutta la lunghezza dei due cilindri, la temperatura varia col tempo e pei diversi punti di contatto, fra le superficie d'attrito vi ha discontinuità prodotta dalle scanalature di separazione dei due mezzi cuscinetti, dai canaletti o zampe di ragno per la distribuzione dell'olio; ed infine lo spessore dello strato lubrificante varia colla natura delle superficie, la quantità del lubrificante, la temperatura, la pressione, le deformazioni delle

superficie stesse, la disposizione dei colletti e dei condotti dell'olio. Tutto ciò obbliga necessariamente a considerare la formola (10) come rappresentante la resistenza d'attrito in circostanze medie. Ora l'elemento che più di tutti può variare è lo spessore dello strato lubrificante; perciò nell'applicazione delle formole (10) e (11) dovremo sostituire ad e il medio spessore ε dello strato lubrificante, con che esse diventano:

$$(14) \ldots\ldots \begin{cases} F = \mu \dfrac{Q\ U_1}{\varepsilon + \dfrac{\mu}{\lambda_1} + \dfrac{\mu}{\lambda_2}} \\ F = \mu \dfrac{Q\ U_1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Indichiamo ora con P la pressione totale supposta egualmente ripartita sulle superficie d'attrito, p la pressione specifica o sulla unità di superficie, f il coefficiente d'attrito totale o cinetico, considerato come il rapporto fra la resistenza d'attrito e la pressione totale, avremo:

$$p = \frac{P}{Q}, \quad f = \frac{F}{P}.$$

Sostituendo questi valori nella (10) si ha:

$$(15) \ldots\ldots\ f = \frac{\mu\ U_1}{p\left(\varepsilon + \dfrac{\mu}{\lambda_1} + \dfrac{\mu}{\lambda_2}\right)}$$

sotto la quale espressione, la formola di Petroff rappresenta la funzione secondo cui, nella stato attuale della scienza, può ritenersi variare il coefficiente d'attrito. Questa formola essendo indipendente dal raggio dei due cilindri, è applicabile anche al caso di due superficie piane le quali si muovono di moto rettilineo l'una sull'altra.

Anche la formola (15) dà luogo agli stessi casi particolari della (10). Se l'aderenza del lubrificante alle superficie d'attrito è grande in confronto dell'attrito interno, come avviene in molti casi, ovvero lo spessore ε sia sufficientemente grande, la somma $\dfrac{\mu}{\lambda_1} + \dfrac{\mu}{\lambda_2}$ può trascurarsi, e si ha:

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ f = \mu \frac{U_1}{p\ \varepsilon}.$$

Se l' attrito interno del lubrificante è grande, talchè ε possa essere trascurato a fronte della somma $\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$, si ha:

$$(17) \quad \dots\dots\dots f = \frac{\mu U_1}{p\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)}$$

e se inoltre è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ si ha:

$$(18) \quad \dots\dots\dots\dots f = \frac{\lambda U_1}{2p}.$$

Da tutte queste formole si vede che il coefficiente d'attrito è una funzione di diverse variabili, cioè: del coefficiente μ d'attrito interno, della velocità relativa U_1 delle superficie d'attrito, della pressione specifica p o sulla unità di superficie, dello spessore ε dello strato lubrificante e dei coefficienti λ_1 e λ_2 d'attrito esterno, ossia del lubrificante rispettivamente col cilindro pieno e col cilindro cavo. Onde dalla variazione di questi sei elementi, dipendentemente dalle circostanze speciali in cui si trovano le superficie d'attrito, si possono avere pel coefficiente d'attrito valori e leggi assai differenti, quali appunto furono trovate dai diversi esperimentatori.

IV

Confronto della formola di Petroff coi risultati delle esperienze di Hirn, Thurston e Kirchweger — Conseguenze.

Assumiamo la formola di Petroff sotto la sua più semplice forma, cioè:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f = \frac{\mu U}{\varepsilon p}$$

e, seguendo le traccie indicate dallo stesso Petroff, confrontiamola coi risultati delle esperienze di Hirn, Thurston e Kirchweger.

Nelle tabelle III, IV, V, VI e VII sono raccolti i coefficienti d'attrito determinati da Hirn, rispettivamente per l'olio d'oliva comune, l'olio di spermaceti e l'olio d'oliva raffinato. Esaminando le tabelle IV e V risulta che i rapporti fra i coefficienti d'attrito alle temperature variabili fra 55° e 25° C., dell'olio d'oliva raffinato e dell'olio di spermaceti, in eguali condizioni di velocità, di pressione, di temperatura, e per essere la lubrificazione abbondante, anche di spessore dello strato lubrificante, sono:

$$\frac{541}{233} = 2{,}32; \frac{675}{280} = 2{,}41; \frac{855}{378} = 2{,}26; \frac{1406}{608} = 2{,}31; \frac{2284}{1052} = 2{,}17.$$

Il medio valore dei quali è 2,29.

Lamanski ([1]), mediante un viscosimetro a tubo capillare, ha determinato i rapporti fra i coefficienti d'attrito interno dell'olio d'olivo e dell'olio di spermaceti, rispettivamente alle temperature di 9°, 16° e 25° C., ed ha ottenuto i seguenti risultati:

$$\frac{810}{312} = 2{,}60; \frac{548}{215} = 2{,}51; \frac{372}{146} = 2{,}55.$$

Il valore medio dei quali è 2,55. La differenza fra questo valore e il precedente 2,29 essendo spiegabile per la diversa natura degli olii, risulta con una certa approssimazione verificata la prima legge inclusa nella formola di Petroff, cioè: *che a parità delle altre circostanze, i coefficienti d'attrito totale o cinetico sono proporzionali ai coefficienti di viscosità.*

Confrontiamo ora le tabelle III, IV, V e VI: dalle tre prime si vede che per la velocità di 51 giri al minuto, i rapporti fra i coefficienti d'attrito alle diverse temperature e quello a 60°, vanno via via crescendo col diminuire della temperatura, e, salvo piccole differenze, sono rispettivamente eguali; dalle tabelle III e VI si vede che per la velocità di 92 giri al primo, gli stessi rapporti vanno pure crescendo col diminuire della temperatura, ma sono notevolmente diversi. Ciò si spiega colla formola di Petroff dalla influenza che hanno la temperatura e lo spessore dello strato lubrificante sul coefficiente d'attrito. Infatti indicando con: f il coefficiente d'attrito alla temperatura di 60°, f_1 quello ad una temperatura qualunque, μ e μ_1, U e U_1, ε ed ε_1 rispettivamente i coefficienti d'attrito interno, le velocità e gli spessori del lubrificante, la pressione essendo la stessa, per la formola di Petroff, si ha:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{U_1}{U} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Pei coefficienti delle tre prime tabelle di Hirn a 51 giri, e col perno immerso nell'olio, velocità e spessore dello strato lubrificante sono costanti; perciò il valore $\frac{f_1}{f}$ dipende soltanto dal

([1]) S. I. Lamanski - *Kais. Russisch. Technischen Vereins.*

rapporto $\frac{\mu_1}{\mu}$; e siccome μ_1 cresce col diminuire della temperatura, così il valore $\frac{f_1}{f}$ deve parimenti crescere. Pei coefficienti a 92 giri lo spessore dello strato lubrificante non può più esser lo stesso, poichè diverso è il modo di lubrificazione; perciò i valori di $\frac{f_1}{f}$ dipendono dal rapporto $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu}$; e siccome i valori $\frac{\mu_1}{\mu}$ crescono in egual misura per entrambi gli olii, così le variazioni di $\frac{f_1}{f}$ dipenderanno da quelle di $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$, vale a dire gli spessori ε_1 andranno diminuendo molto di più nel caso dei coefficienti della tabella VI che per quelli della III; la qual cosa è confermata da che i coefficienti della tabella VI sono stati determinati essendo il perno lubrificato una volta sola, e però in condizioni che, consumandosi l'olio, lo spessore di questo doveva necessariamente diminuire.

In ordine alla influenza della quantità, e quindi dello spessore del lubrificante sul coefficiente d'attrito, Hirn alla pagina 210 della sua Memoria: « *Études sur les principaux phénomènes que présentent les frottements* ecc. » dice: *a misura che la velocità diminuisce la quantità di lubrificante che passa fra il perno e il cuscinetto diminuisce parimenti; le due superficie si avvicinano e la loro azione reciproca si fa maggiore;* e alle pagine 213 e 214: *se la velocità diminuisce restando costante la temperatura, il coefficiente d'attrito da prima diminuisce per un certo tempo pressochè proporzionalmente alla velocità; arriva un momento nel quale cessa di diminuire, poi incomincia a crescere rapidamente e supera considerevolmente il valore che esso ha per la più grande velocità.* E ciò, soggiunge, è naturale; poichè *l'olio essendo molto fluido e la pressione molto forte, arriva un momento nel quale la velocità non è più sufficiente per trascinare il lubrificante fra le superficie d'attrito; queste si avvicinano sempre più e l'attrito finisce per divenire immediato.*

Da queste osservazioni non si può stabilire una esatta relazione fra lo spessore del lubrificante e la velocità; ma si può inferire che, sebbene il lubrificante non manchi, tuttavia lo strato di

esso interposto fra le superficie d' attrito, diminuisce col diminuire della velocità. Onde consegue che, per quanto riguarda l'influenza della velocità sul coefficiente d'attrito, i risultati della formola di Petroff non possono essere assoluti, ma debbono necessariamente dipendere dallo spessore dello strato lubrificante. E solo a spessore costante può verificarsi la proporzionalità fra il coefficiente d'attrito e la velocità; il che è pure confermato dalle esperienze di Hirn. Infatti dalla tabella III si vede che essendo il perno abbondantemente lubrificato, sì che lo spessore ε può ritenersi costante, fra le temperature di 60° e 25° variando le velocità da 92 a 51 giri al minuto, cioè nel rapporto di 1 : 0,55, i coefficienti d'attrito variano secondo un rapporto medio poco diverso, cioè di 1 : 0,62: del pari dalla tabella VII vediamo che alla stessa temperatura di 40°, variando la velocità nello stesso rapporto di 1 : 0,55, il rapporto medio dei coefficienti d'attrito è di 1 : 0,63 poco diverso dal primo. Una quantità di altre esperienze, dice Hirn, (pag. 208 della precitata Memoria) *mi hanno condotto agli stessi risultamenti;* per conseguenza resta confermata la legge inclusa nella formola di Petroff, e cioè: che a spessore costante del lubrificante (lubrificazione abbondante) il coefficiente d'attrito varia in ragione diretta della velocità.

Hirn soggiunge che la relazione fra la velocità e l'attrito non si può enunciare in una sola legge generale, e come è già stato esposto nel Capo I, pel caso della lubrificazione intermittente, che egli considera più comune nella pratica, il coefficiente d'attrito varia in ragione diretta della radice quadrata della velocità; il quale principio è perfettamente in armonia colla formola di Petroff, poichè con una lubrificazione intermittente lo spessore dello strato lubrificante scema col scemare della velocità, e può essere che nelle esperienze di Hirn abbia appunto diminuito in quella ragione, da ridurre il coefficiente d'attrito direttamente proporzionale alla radice quadrata della velocità.

Per quanto riguarda l'influenza della pressione sul coefficiente d'attrito, Hirn dà numerose esperienze eseguite col suo dinamometro sopra una Mule-Jenny, variando la pressione specifica nel rapporto da 12 a 20, come è stato indicato nel

Capo I, trovò che il coefficiente d'attrito varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione specifica. Questa legge sarebbe in contraddizione colla formola di Petroff: conviene però osservare che lo spessore ε dello strato lubrificante non dipende solamente dalla velocità, ma anche dalla pressione specifica e, come si vedrà in appresso, varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione medesima; con che la contraddizione riesce soltanto apparente.

Verificata colle esperienze di Hirn la formola di Petroff sotto la sua forma più semplice, ne viene che la somma dei due termini:

$$\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$$

che entra nel denominatore della formola generale (21), a fronte di ε può essere trascurabile. Per confermare questa conseguenza, Petroff ha eseguite alcune esperienze mediante una macchina Ingham e Stapfer (Bailey), la quale consiste in due cuscinetti stretti, mediante pesi, sopra un albero mobile intorno ad un asse orizzontale: un termometro posto entro una cavità del cuscinetto superiore, permette di misurare la temperatura d'attrito. L'albero di questa macchina venne lubrificato con olio d'olivo, una volta con una sola goccia, un'altra con due goccie. Nella esperienza con una sola goccia, della durata di 8 minuti, ripetuta 3 volte, l'albero fece in media 10262 giri, e la temperatura da 12° C. salì a 70°, cioè crebbe di 55°. In un'altra esperienza, ripetuta pure tre volte, con due goccie dello stesso olio, della durata di 13 minuti, l'albero fece in media 17808 giri, e la temperatura da 20° C. salì a 70°, cioè crebbe di 50°; in una terza esperienza con due goccie, ripetuta tre volte, della durata di 13 minuti e mezzo, l'albero fece 18152 giri e la temperatura da 20° salì a 70°, con un aumento pure di 50° Da coteste esperienze Petroff stabilì che per ottenere l'aumento di temperatura di 50° colla lubrificazione di una sola goccia occorrevano 9500 e colla lubrificazione di due goccie 18000 giri, cioè circa il doppio del primo. Ora essendo il numero dei giri per minuto prossimamente il medesimo per ogni esperienza, eguale la pressione, e con piccole differenze eguale anche la temperatura, e

quindi eguale il coefficiente d'attrito interno, Petroff dedusse che il coefficiente d'attrito totale era inversamente proporzionale al numero delle goccie, cioè allo spessore dello strato lubrificante e conseguentemente che la somma:

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$$

era trascurabile a fronte dello spessore ε. Essendo poi la superficie d'attrito di 17000 millimetri quadrati, e il volume di ogni goccia di 17 millimetri cubici, lo spessore dello strato lubrificante corrispondente risultò di millimetri 0,001. Petroff ha fatto notare che lo spessore ε dello strato lubrificante non è solamente dipendente dalla velocità e dalla pressione, ma ancora dalla temperatura e dalle deformazioni che può subire il perno sotto l'azione delle forze esterne: in ogni caso note le quantità μ, U, f, p, esso può essere calcolato mediante la formola:

$$\varepsilon = \frac{\mu U}{f p}.$$

Le esperienze di Hirn sono state eseguite con velocità comprese fra m. 0,602 e m. 1,108, e sotto pressioni poco diverse da 0,100 atmosfere; per tener conto di velocità e pressioni maggiori esaminiamo le esperienze di Thurston.

Come Hirn anche Thurston tenne conto della temperatura, e pressochè negli stessi limiti, 32°,2 C. e 65°,5; cambiò notevolmente la velocità e la pressione, la prima variando fra m. 0,152 e m. 6,10 e la seconda fra 0,27 e 68 atmosfere. Vi ha però una circostanza da notarsi, cioè: mentre nelle esperienze di Hirn il sistema di lubrificazione era ben determinato, sì che potevasi distinguere quando lo spessore dello strato lubrificante era costante o meno, in quelle di Thurston, non essendo detto come fosse fatta la lubrificazione, o per mezzo di uno stoppino o direttamente, da quanto appare dal disegno della macchina di Thurston inserito nella sua opera « *Friction and lubrication* » si fa luogo a supporre che lo spessore dello strato lubrificante non fosse costante. Ciò può pure ritenersi da altre due circostanze; primieramente da che le pressioni sotto cui espe-

rimentò Thurston essendo assai più grandi di quelle esperimentate da Hirn, avranno contribuito a diminuire lo spessore dello strato lubrificante; in secondo luogo in molte esperienze le velocità essendo più piccole di quelle esperimentate da Hirn, anche per questo lato lo spessore dello strato lubrificante avrà diminuito.

Ammesso pertanto che lo spessore ε abbia diminuito e in causa della velocità e in causa della pressione, le esperienze di Thurston concordano pienamente colla formola di Petroff. Infatti dalla tabella XII risulta che, col crescere della temperatura, il coefficiente d'attrito cresce soltanto fino alla velocità di 100 piedi o di m. 0,506 per 1″. Ciò si spiega colla formola di Petroff ammettendo che la diminuzione del coefficiente d'attrito, che dovrebbe aver luogo per l'aumentata temperatura, sia superata dal maggiore attrito prodotto dal minore spessore ε dello strato lubrificante corrispondente alle più piccole velocità. Per velocità maggiori di m. 0,506 coll'aumento di temperatura, il coefficiente d'attrito scema tanto più quanto minore è la pressione: e ciò è pure spiegabile; poichè quanto maggiore è la velocità e minore la pressione, maggiore diviene lo spessore ε dello strato lubrificante, e più grande è l'influenza della diminuzione del coefficiente μ per abbassare il coefficiente d'attrito totale. Infine per velocità intermedie il coefficiente d'attrito è indipendente dalla temperatura; e ciò è pure spiegabile ammettendo che μ ed ε contemporaneamente diminuiscono in modo che il loro rapporto rimanga costante.

In ordine alla velocità, secondo Thurston, per perni non riscaldati e in buone condizioni, lubrificati con buon olio di spermaceti, per velocità fra m. 0,506 e m. 6,1 al 1″, il coefficiente d'attrito può ritenersi proporzionale alla radice quinta della velocità. Ciò non è in armonia nè colle leggi di Hirn nè colla formola di Petroff: il divario però può essere spiegato dal fatto che nella macchina di Thurston il termometro era piuttosto distante dallo strato lubrificante; onde le temperature di questo dovevano essere certamente maggiori di quelle osservate, e quindi anche maggiori di quelle sotto cui furono eseguite le esperienze di Hirn. Thurston stesso dichiara che le temperature da esso osservate non erano che approssimative. Ora ad una

maggiore temperatura corrisponde un minore coefficiente d'attrito interno μ; perciò il minor valore del coefficiente d'attrito totale trovato da Thurston, sarebbe spiegato colla diminuzione dell'attrito interno prodotto dalla maggior temperatura.

Per quanto riguarda la pressione, dalla tabella XII si vede che da 100 a 200 libbre per pollice quadrato, ossia da 6,8 fino a 13,6 atmosfere, il coefficiente d'attrito cresce colla pressione specifica, e solamente diminuisce per pressioni inferiori e per velocità fra m. 0,152 e m. 0,506 al 1″. Ciò si può spiegare colla formola di Petroff, osservando che per le alte pressioni e grandi velocità, lo spessore ε dello strato lubrificante scemava colla pressione più di quello che cresceva colla velocità, onde l'attrito aumentava; mentre per le basse pressioni e piccole velocità, lo strato lubrificante cresceva più di quanto scemava per la diminuzione delle velocità, onde l'attrito diminuiva. Si trova però nell'opera del Thurston la seguente tabella E, nella quale sono notati alcuni coefficienti d'attrito per velocità di m. 1,515, relativi ai perni d'acciaio, cuscinetti di bronzo, lubrificati con olio di spermaceti; i quali coefficienti non concordano con quelli della tabella XII.

TABELLA E

Pressione	Libbre per pollice □	100	200	300	400	500
	Atmosfere	6, 8	13, 6	20, 4	27, 2	34
	$f=$	0, 0141	0, 0063	0, 0049	0, 0042	0, 0039

Da questa tabella si vede che per pressioni comprese fra 6,8 e 34 atmosfere il coefficiente d'attrito scema col crescere della pressione specifica.

Altri coefficienti del Thurston consegnati nella seguente tabella F non concordano con quelli della tabella XII:

TABELLA F

Coefficienti d'attrito — Perno di ghisa, cuscinetto d'acciaio — Velocità di 150 piedi per minuto o 0,759 metri per secondo.

Pressione	Libbre per pollice □	50	100	250	500	750	1000
	Atmosfere	3, 4	6, 8	17	34	51	68
	Spermaceti	0, 013	0, 008	0, 005	0, 004	0, 0043	0, 009
	Olio della Virginia occidentale	0, 0213	0, 015	0, 009	0, 00525	0, 005	0, 010

Da questa tabella si vede che con pressioni sino a 34 atm. per l'olio di spermaceti e sino a 51 per l'olio della Virginia occidentale, il coefficiente d'attrito scema col crescere della pressione, e conseguentemente questi lubrificanti conservano uno spessore sufficiente per diminuire l'attrito.

Dal complesso delle sue esperienze Thurston dedusse che il coefficiente d'attrito varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione, il qual principio concorda colla formola di Petroff, ammettendo qui pure che lo spessore ε dello strato lubrificante varii in ragione inversa della radice quadrata della pressione, come meglio ora si vedrà potersi ammettere dalle esperienze di Kirchweger.

Per confrontare le esperienze di Kirchweger, Tabelle VIII, IX, X e XI, colla formola di Petroff, è necessario conoscere le temperature dello strato lubrificante in queste esperienze, le quali temperature non furono da Kirchweger osservate. In via di approssimazione si possono calcolare nel modo seguente. Indichiamo con: P il carico totale in Cg. sul perno, d il diametro di questo in metri, n il numero di giri di esso al 1′, f il coefficiente d'attrito, Δ il coefficiente di conducibilità del calore attraverso ai corpi circostanti al perno, ossia il numero

di calorie disperse per conducibilità al minuto primo, t la temperatura dello strato lubrificante, t_0 quella dell'aria ambiente; essendo due i perni, applicando il principio della equivalenza del calore e del lavoro, avremo:

$$425\,(t - t_0)\,\Delta = 2\pi d f P n$$

da cui:

$$t - t_0 = \frac{2\pi d f P n}{425\,\Delta}.$$

Da speciali esperienze di Petroff, fatte in condizioni analoghe a quelle dell'apparecchio di Kirchweger, può ritenersi $\Delta = \frac{1}{4}$; ponendo $d = m\ 0{,}066$, diametro dei perni della bilancia di Kirchweger, $n = 180$, sostituendo per P ed f i valori delle tabelle VIII, X e XI, si ottengono per $(t - t_0)$ i seguenti valori:

Per la Tabella VIII

Libbre...	160;	260;	410;	510;	660;	760;	910;	1010
$(t - t_0)$...	1,1;	1,3;	2,0;	2,2;	2,3;	2,3;	2,7;	2,5 C.

Per la Tabella X

Libbre...	2070;	4070;	6070;	8070
$(t - t_0)$...	6,0;	12,2;	16,3;	20,9 C.

Per la Tabella XI

Libbre...	4070;	6070;	8070
$(t - t_0)$...	21,4;	33,4;	44,2 C.

Questi risultati indicano che le esperienze della tabella VIII furono fatte a temperatura pressochè costante; mentre quelle delle tabelle X e XI a temperature variabili, e notevolmente maggiori per quelle della tabella XI corrispondenti a 360 giri al primo. I coefficienti d'attrito delle tabelle X e XI non sono molto diversi. Ciò pare, ma non è in contradizione colla formola di Petroff; anzi lascia intravvedere che le esperienze relative a queste due tabelle siano state eseguite in circostanze tali che il valore $\frac{\mu U}{\varepsilon}$ sia rimasto il medesimo nelle due serie di esperienze, vale a dire che, per l'aumento di temperatura, μ sia diminuito e per

la maggior velocità ε sia accresciuto in modo, che il minor valore risultante pel rapporto $\frac{\mu}{\varepsilon}$ abbia compensato l'aumento dovuto alla velocità. Consegue quindi che la quarta legge di Kirchweger, e cioè che il coefficiente d'attrito è indipendente dalla velocità, non può essere accettata come assoluta.

Analogamente la terza legge di Kirchweger, cioè che il coefficiente d'attrito è indipendente dalla pressione, non è vera; poichè le esperienze della tabella VIII, eseguite, come si è visto, pressochè a pari temperatura, palesemente dimostrano che il coefficiente d'attrito non è indipendente dalla pressione, ma scema col crescere di questa. Per riconoscere la relazione fra il coefficiente d'attrito e la pressione in questo caso, indichiamo con p ed f la pressione specifica ed il coefficiente d'attrito in generale, e con p_1, f_1 le stesse quantità nel caso speciale che la pressione sia 2,11 atmosfere, e il rispettivo coefficiente medio d'attrito sia 0,0245; i rapporti fra p ed f quali derivano dalla tabella VIII sono rappresentati dalla espressione:

$$\frac{f_1}{f} = \sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

L'esattezza di questa equazione è dimostrata dalla seguente tabella G:

TABELLA G

Pressione in atmosfere	2,11	3,42	5,4	6,71	8,69	10,01	11,98	11,30
$\frac{f_1}{f}$	1	1,47	1,49	1,64	2,03	2,33	2,38	2,85
$\sqrt{\frac{p}{p_1}}$	1	1,27	1,60	1,79	2,03	2,18	2,38	2,51

Adunque anche dalle esperienze di Kirchweger risulta confermata la legge trovata da Hirn e da Thurston, e cioè: che il coefficiente d'attrito varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione specifica. Conviene però notare che,

come risulta dalle esperienze di Kirchweger, questa legge non è generale, ma vale solo nelle condizioni della Tabella VIII, cioè a temperatura costante. Anche per le esperienze di Thurston, caso della tabella F, i valori dei coefficienti d'attrito soddisfacenti alla accennata legge, sarebbero stati determinati a temperatura pressochè costante. Consegue quindi che la legge secondo cui il coefficiente d'attrito varia in ragione inversa della pressione specifica, sarebbe soltanto verificata a temperatura costante.

Indichiamo ora con ε lo spessore dello strato lubrificante corrispondente alla pressione specifica p ed al coefficiente d'attrito f, con ε_1 lo spessore corrispondente alla pressione p_1 ed al coefficiente d'attrito f_1, supposta la temperatura costante; per la legge ora accennata, sarà:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}}$$

e per la formola di Petroff:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{\varepsilon p}$$

dalle quali si ha:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}}.$$

Coordinando adunque la formola di Petroff coi risultati delle esperienze di Thurston e Kirchweger ne discende che: *a temperatura costante lo spessore ε dello strato lubrificante varia in ragione inversa della pressione specifica:* e per conseguenza anche il coefficiente d'attrito varia colla stessa legge.

Lo spessore dello strato lubrificante non è solamente funzione della velocità e della pressione, ma è anche funzione della temperatura; e ciò è razionale, poichè crescendo la temperatura il lubrificante si fa più fluido, e perciò più facilmente può entrare sotto il perno ed accrescere il suo spessore; però fino ad un certo grado, dopo di che il lubrificante diventando troppo fluido sfugge dalla superficie d'attrito. Infine Petroff ha fatto notare che lo spessore dello strato lubrificante è anche dipendente dalle deformazioni che può subire il perno sotto

l'azione delle forze esterne. E ciò è pure evidente, poichè deformandosi il perno, varia la distanza delle due superficie d'attrito, e conseguentemente lo spessore dello strato lubrificante. Come si vede, cotesto spessore ha una influenza grandissima e costituisce parte integrante del coefficiente d'attrito.

Frattanto dalla discussione fatta sugli studî di Hirn, Thurston e Kirchweger, la formola di Petroff espressa sotto la più semplice forma, resta sufficientemente confermata, e come conseguenze da essa derivano le seguenti leggi sull'attrito.

Quando l'attrito interno è trascurabile a fronte dell'attrito esterno, le superficie siano abbondantemente lubrificate ed esattamente aggiustate, il coefficiente d'attrito è:

1.° *direttamente proporzionale al coefficiente d'attrito interno del lubrificante;*

2.° *direttamente proporzionale alla velocità relativa delle superficie d'attrito;*

3.° *inversamente proporzionale allo spessore medio dello strato lubrificante;*

4.° *inversamente proporzionale alla pressione specifica o sulla unità di superficie;*

5.° *a temperatura costante lo spessore* ε *dello strato lubrificante è inversamente proporzionale alla radice quadrata della pressione specifica; e conseguentemente anche il coefficiente d'attrito segue la stessa legge.*

V

Speciali esperienze di Petroff — Curve caratteristiche degli olii lubrificanti — Determinazione grafica dei coefficienti d'attrito.

Per verificare la sua formola espressa sotto la forma più generale, Petroff ha eseguite speciali esperienze sopra diverse qualità di olii, con velocità variabili da m. 0,28 a m. 2,00 al 1'', e pressioni fra 9 e 90 atmosfere. Tali esperienze furono dall'autore comunicate al distintissimo ing. italiano sig. P. Verole direttore delle officine della Ferrovia Mediterranea a Milano, nella occasione in cui egli recossi in Russia a studiarvi diverse questioni ferroviarie. Dei risultati di coteste esperienze il Verole ha trattato in una interessante memoria, pubblicata nell'*Industria* di Milano (22 luglio 1888) e riprodotta nel *Bulletin de la Commission Internationale du Congrès des chemins de fer* (1888); dalle quali pubblicazioni le nuove vedute del Petroff hanno incominciato a diffondersi presso di noi ed all'estero.

Petroff eseguì le sue esperienze mediante tre apparecchi: un viscosimetro a tubo capillare col quale determinò i coefficienti d'attrito interno di diversi lubrificanti, e due apparecchi meccanici, l'uno a pendolo analogo a quello di Thurston pei perni comuni, l'altro a bilancia simile a quello di Kirchweger per gli assi ferroviari [1]. I risultati delle numerose esperienze

[1] V. P. Verole — Memoria citata.

del Petroff sono consegnati nelle Tabelle XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII.

La Tabella XIII porge i coefficienti d'attrito interno μ di diversi olii animali, vegetali e minerali, espressi in milligramma per millimetro quadrato a diverse temperature, e le loro densità *d.* Da questa tabella appare che:

1.° *la viscosità o l'attrito interno degli olii lubrificanti è indipendente dalla loro densità;* contrariamente a quanto si riteneva pel passato, e cioè che i lubrificanti più densi fossero anche i più vischiosi:

2.° *la viscosità degli olii diminuisce col crescere della temperatura.*

Riprendiamo la formola di Petroff:

$$(1) \ldots\ldots\; f = \frac{\mu\, U}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}$$

da essa si ricava:

$$\frac{1}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}} = p \frac{f}{\mu\, U}$$

pongasi:

$$\frac{f}{\mu\, U} = C.$$

Nelle Tabelle XIV e XV sono notati i valori dei coefficienti d'attrito interno μ e totale f, della velocità U e del rapporto C per diversi olii a pressione costante: sono notati pure i valori medi C_1 di tutti i valori di C, i valori medi C'_1 di tutti i valori di C relativi ad una medesima qualità di olio, e finalmente i rapporti:

$$\frac{C - C_1}{C_1} \text{ e } \frac{C - C'_1}{C'_1}.$$

Da queste Tabelle si vede che il rapporto C realmente varia al variare di f, μ ed U. Però le sue variazioni non sono molto forti, e sono da attribuirsi alla variazione della velocità, e probabilmente ad un diverso stato delle superficie d'attrito verificatosi da un'esperienza all'altra: onde con sufficiente approssimazione può ritenersi che: *a pressione costante*

il trinomio $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$ *sia pure costante.* E per conseguenza indicando con: ε', μ', λ_1, $\lambda_1{}^1$, rispettivamente lo spessore, il coefficiente d'attrito interno e quelli esterni di un altro lubrificante qualsiasi, sarà:

$$(2) \quad \dots \; \varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1} = \varepsilon' + \frac{\mu'}{\lambda'} + \frac{\mu_1}{\lambda_1{}^1}.$$

Dalle stesse Tabelle XIV e XV si vede ancora che i valori medii C_1 e C'_1 differiscono assai poco nelle due serie di esperienze, e che i rapporti $\frac{C - C_1}{C_1}$ $\frac{C - C^1{}_1}{C_1{}^1}$ sono frazioni assai piccole: anche questo comprova il grado di sufficiente approssimazione della eguaglianza (2).

Ciò posto, indichiamo con f ed f_1 rispettivamente i coefficienti d'attrito totale di due lubrificanti di cui μ e U, μ_1 e U_1 siano i coefficienti d'attrito interno e le velocità. Ammessa la pressione costante, il rapporto C sarà pure costante per entrambi i lubrificanti, e quindi sarà:

$$\frac{f}{\mu\, U} = \frac{f_1}{\mu_1\, U_1}$$

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu\, U}{\mu_1\, U_1}$$

da cui posto $U = U_1$ si ha:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu}{\mu_1}$$

e posto $\mu = \mu_1$

$$\frac{f}{f_1} = \frac{U}{U_1}$$

cioè dalle Tabelle esaminate derivano queste due importantissime conseguenze:

1.° *a pari pressione specifica e velocità, i coefficienti d'attrito totale sono proporzionali ai coefficienti d'attrito interno:*

2.° *a pari pressione specifica e attrito interno, i coefficienti d'attrito totale sono proporzionali alle velocità.*

Ora queste conseguenze, a parità delle altre circostanze, derivano parimenti dalla formola di Petroff, quindi per quanto riguarda i rapporti fra f, μ e v, essa con sufficiente approssimazione pratica rimane confermata.

Verificata la condizione espressa dalla (2), e cioè che il denominatore della formola generale di Petroff, a pressione costante, si può con sufficiente approssimazione ritenere pure costante, si possono determinare graficamente per diversi casi, in modo abbastanza semplice, i coefficienti di viscosità o d'attrito interno, e conseguentemente calcolare i coefficienti d'attrito totale o cinetico dei lubrificanti.

Assumiamo due assi ortogonali $O\ T$, $O\ \mu$, Fig. 3ª, sul primo dei quali, come ascisse, si portino le temperature, e parallelamente all'altro, come ordinate, i coefficienti d'attrito interno o di viscosità; le curve che si ottengono riunendo tutti gli estremi di coteste ordinate, costituiscono le *curve caratteristiche* degli olii considerati. Esse danno una chiara idea delle variazioni di viscosità e temperatura dei diversi olii. Siano infatti, Fig.ª 3.ª, *a a, b b, c c* le curve caratteristiche di tre olii lubrificanti; se si vogliono conoscere le viscosità di essi alla temperatura t, basterà portare sull'asse $O\ T$ il segmento $o\ t$ proporzionale a t, pel punto t elevare una perpendicolare alla $O\ T$ fino ad incontrare le tre curve nei punti n, n', n'', le ordinate $t\,n$, $t\,n'$, $t\,n''$, misurate nella scala delle viscosità, daranno la viscosità dei tre olii a quella temperatura. Si porti sull'asse $O\mu$ il segmento $O\,n'_1$ eguale ad una certa viscosità, e per n'_1 si conduca la retta $n'_1\ n'$ parallela alla $O\ T$ ad incontrare in m ed n' le curve *a* e *b*, le ascisse $O\,t_1$, $O\,t$ dei punti m e n', rappresenteranno le temperature dei due lubrificanti *a b* alla stessa viscosità $O\,n'_1$. Di qui si vede che a pari temperatura tanto minore è la viscosità, e a pari viscosità tanto maggiore è la temperatura, quanto più bassa è la curva caratteristica, ossia più si avvicina all'asse delle temperature ; onde scelta come termine di confronto la caratteristica di un dato olio, quanto più le caratteristiche di altri olii si avvicineranno ad essa, più questi olii si troveranno in buone condizioni di viscosità; e siccome, giusta quanto si è detto precedentemente, a parità delle altre circostanze, i coef-

ficienti di viscosità sono proporzionali ai coefficienti d'attrito totale, così gli stessi olii si troveranno anche in migliori condizioni di lubrificazione.

Indichiamo con: F la resistenza d'attrito alla superficie di contatto del perno col cuscinetto, U la velocità lineare del perno, Δ il coefficiente di conducibilità termica dei corpi circostanti al perno (supporti, albero ecc.), E l'equivalente dinamico del calore, t la temperatura dello strato lubrificante, t_0 quella dell'aria esterna, considerando il perno alla temperatura di regime, alla quale cioè tanto calore si produce per attrito, quanto ne viene trasmesso per conducibilità dai corpi circostanti, pel principio dell'equivalenza del lavoro in calore, sarà:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F\,U = E\,\Delta\,(t - t_0).$$

Da questa indicando con Q la superficie premuta dal perno, ritenute le denominazioni precedenti, sostituendo per la resistenza d'attrito F l'espressione data dalla formola di Petroff (pag. 50) si ha:

$$(3^1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mu}{t - t_0} = \frac{\Delta\,E\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)}{U^2\,Q}.$$

Siano μ_1, t_1, t'_0, ε_1, λ^1, λ'_1, U_1, Q_1, Δ_1 le quantità che entrano in questa formola per un altro lubrificante, si avrà:

$$\frac{\mu_1}{t_1 - t'_0} = \frac{\Delta_1\,E\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda'_1}\right)}{U_1^2\,Q_1}.$$

Supposta la presssione specifica costante in ambo i casi, per la condizione (2), sarà:

$$\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1} = \varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda'_1}$$

e però dalle precedenti relazioni avremo:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mu_1}{t_1 - t'_0} = \frac{\mu}{t - t_0}\,\frac{U^2\,Q\,\Delta_1}{U_1^2\,Q_1\,\Delta}.$$

Consideriamo ora le due curve caratteristiche *aa*, *bb*, Fig. 3.ª, di cui la prima sia corrispondente al lubrificante di viscosità μ

e l'altra a quella di viscosità μ_1. Sull'asse $O\ T$ portiamo rispettivamente i segmenti: $O\,t_0 = t_0$ = alla temperatura dell'aria esterna, $O\,t = t$ = alla temperatura del lubrificante a; $Ot'_0 = t'_0$ = ad un'altra temperatura dell'aria esterna, $Ot_1 = t_1$ = alla temperatura del lubrificante b; pei punti t e t_1 eleviamo le ordinate $t\,n$, $t_1\,m'$ delle curve $a\,a$, $b\,b$, sarà: $t\,n = \mu$, $t_1\,m' = \mu_1$. Congiungiamo i punti n ed m' rispettivamente coi punti t_0 e t'_0, ed indichiamo con α ed α_1, rispettivamente gli angoli $n\ t_0\ t$, $m'\ t'_0\ t_1$, sarà:

$$\frac{\mu}{t - t_0} = \text{tang. } \alpha$$

$$\frac{\mu_1}{t_1 - t'_0} = \text{tang. } \alpha_1 .$$

Sostituendo questi valori nella (4) avremo:

$$(5) \ldots\ldots \text{tang. } \alpha_1 = \text{tang. } \alpha \frac{U^2\ Q\ \Delta_1}{U_1^2\ Q_1\ \Delta}$$

dalla quale, passando a casi particolari, derivano diverse regole per determinare graficamente il coefficiente di viscosità e la temperatura corrispondente.

Supponiamo primieramente che la temperatura esterna sia la stessa, e siano: $U = U_1$, $Q = Q_1$, $\Delta = \Delta_1$; allora sarà tang. α = tang. α_1, e per essere $t_0 = t'_0$, la retta $t'_0\,m'$ e la $t_0\,n$ coincideranno, e però, se è dato il coefficiente μ di viscosità del lubrificante a, quello μ_1 del lubrificante b sarà rappresentato dalla ordinata $t'_1\ m'_1$ del punto d'incontro della retta $t_0\ n$ colla curva b, e la temperatura corrispondente dello stesso lubrificante sarà rappresentata dalla ascisse $O\,t'_1$. Di qui consegue che, a pari velocità, pressione specifica, estensione della superficie di contatto, conducibilità e temperatura esterna, note le curve caratteristiche di due olii lubrificanti, conoscendo il coefficiente d'attrito interno μ o la corrispondente temperatura di uno di essi, si determinerà il coefficiente d'attrito interno e la corrispondente temperatura dell'altro, procedendo nel modo seguente: si porti il segmento $O\,t_0$ = alla temperatura dell'aria esterna, e quella $O\,t$ = alla temperatura del lubrificante alla viscosità nota μ, pel punto t, si elevi l'ordinata $t\,n$

ad incontrare in n la curva caratteristica aa, si tiri la retta $t_0 n$ sino a tagliare in m'_1 la curva caratteristica bb, l'ordinata $m'_1 t'_1$ del punto d'incontro m'_1 rappresenterà la viscosità cercata μ_1, e l'ascissa Ot'_1 la temperatura corrispondente. Ottenuti così il coefficiente d'attrito interno μ_1 e la temperatura t_1^1, noti i coefficienti d'attrito interno e totale μ ed f dell'olio preso come termine di confronto, si determinerà il corrispondente coefficiente d'attrito totale f_1 di un olio qualunque, mediante la relazione:

$$f_1 = f \frac{\mu_1}{\mu} = f \frac{t_1 - t_0}{t - t_0}.$$

E per la (3), detta F_1 la corrispondente resistenza d'attrito totale, sarà:

$$F_1 = F \frac{t_1 - t_0}{t - t_0} = f P \frac{\mu_1}{\mu}.$$

Dalle quali relazioni si vede che per uno stesso perno, a pari pressione e velocità, i rapporti fra i coefficienti e le resistenze d'attrito totale di due olii lubrificanti dipendono dalla temperatura esterna.

Come secondo caso supponiamo che la pressione specifica, l'estensione della superficie di contatto, la conducibilità e la temperatura esterna rimangono costanti, e variano le velocità lineari del perno; allora per la (5) avremo:

$$\text{tang. } \alpha_1 = \text{tang. } \alpha \frac{U^2}{U_1^2} = \frac{\mu}{t - t_0} \frac{U^2}{U_1^2} = \frac{\mu_1}{t_1 - t_0}.$$

Con questa equazione, noti i valori del coefficiente di viscosità $\mu = tn$ dell'olio a, la corrispondente temperatura Ot, le velocità U ed U_1, si determinerà il valore di tang. α_1: si costruirà in t_0 l'angolo $mt_0 t_1 = \alpha_1$, si prolungherà il lato $t_0 m$ fino ad incontrare in m_2 la caratteristica b, l'ordinata $m_2 t_2$ rappresenterà il coefficiente di viscosità μ_1 dell'olio b corrispondente al coefficiente $\mu = tn$ dell'olio a, e l'ascissa Ot_2 rappresenterà la temperatura dell'olio b corrispondente alla t di a, sostituendo poi il valore di μ_1 così determinato, nella espressione:

$$f_1 = \frac{\mu_1}{\mu} \frac{U_1}{U} f$$

si avrà il valore del coefficiente d'attrito totale f_1 dell'olio b; e per la (3) la resistenza d'attrito F_1 sarà:

$$F_1 = F \frac{U}{U^1} \cdot \frac{t_1 - t_0}{t - t_0}.$$

Supponiamo finalmente che velocità, pressione specifica, estensione di superficie e conducibilità rimangano le stesse, e varii soltanto la temperatura esterna, la quale da t_0 diventi t^1_0; allora per la (5) sarà:

$$\text{tang. } \alpha_1 = \text{tang. } \alpha$$

$$\frac{\mu_1}{t_1 - t'_0} = \frac{\mu}{t - t_0}.$$

In questo caso per avere il valore μ_1 si porterà sull'asse OT il segmento $Ot'_0 = t'_0$, per t'_0 si condurrà la retta $t'_0\, n'_2$ parallela a $t_0\, n$ fino a tagliare in n^1_2 la caratteristica b, l'ordinata $n'_2\, t'_2$ rappresenterà il coefficiente di viscosità dell'olio b, e l'ascissa $O t'_2$ la corrispondente temperatura. Noti questi valori si determinerà il coefficiente d'attrito totale colla formola:

$$f_1 = f \frac{\mu_1}{\mu}$$

e la resistenza d'attrito totale colla formola:

$$F' = F \frac{t_1 - t'_0}{t - t_0}.$$

Per verificare il grado di approssimazione delle costruzioni grafiche indicate, serve la Tabella XVI, nella quale sono consegnati i rapporti n_1 ed n dei coefficienti d'attrito ottenuti da una parte mediante l'osservazione, dall'altra graficamente. Le esperienze alle quali si riferisce cotesta Tabella sono state eseguite sopra un asse di veicolo ferroviario, e come si vede sono riunite in coppie, per ciascuna delle quali la pressione è costante, e con una certa approssimazione costante anche la velocità. Dai numeri della Tabella XVI si vede che, salvo pochi casi, le differenze fra i rapporti esperimentali e i calcolati sono piccole; onde con sufficiente approssimazione si può ammettere che i metodi grafici s'accordano coi risultati della esperienza. Le notevoli differenze fra i valori di n_1 ed n son da attribuirsi

alle variazioni nello stato delle superficie d'attrito; poichè fra le due esperienze di una stessa coppia eseguite a pressione e velocità costanti, indicate nella Tabella XVI, venivano intercalate altre della durata persino di più giorni.

È importante notare che i valori dei coefficienti d'attrito calcolati col metodo grafico, rispondono al vero solamente per quegli olii minerali le cui caratteristiche si avvicinano a quella dell'olio di colza; per quegli altri le cui caratteristiche deviano notevolmente, sopra o sotto, da quella dell'olio di colza, le differenze fra i coefficienti d'attrito calcolati e gli esperimentali, possono salire sino al 25 $^{0}/_{0}$: essendo i valori calcolati superiori ai reali per gli olii minerali le cui caratteristiche sono al di sopra di quella dell'olio di colza, inferiori per gli altri. I coefficienti calcolati si possono però rettificare mediante la seguente formola confermata da un gran numero di esperienze. Indicando con: n il rapporto fra il coefficiente d'attrito relativo all'olio minerale che si considera e quello dell'olio di colza, n_1 lo stesso rapporto rettificato, μ_{20} il valore del coefficiente d'attrito interno espresso in milligrammi dell'olio che si considera alla temperatura di 20° C., si ha:

$$(6) \ldots\ldots \quad n_1 = \frac{1141 + 69,500\ \mu_{20}}{976 + 100,000\ \mu_{20}}\ n.$$

Moltiplicando quindi il coefficiente d'attrito calcolato pel rapporto $\frac{n_1}{n}$, si avrà quello rettificato. La Tabella XVII mostra il grado di approssimazione più che sufficiente che si ottiene applicando la formola (6). In questa tabella sono distinti due gruppi di esperienze: quelle del primo gruppo furono eseguite colla macchina per gli assi dei veicoli ferroviari, quelle del secondo gruppo coll'altra a pendolo. Le pressioni furono di 16, 6, 63, 73 e 90 atmosfere, e le velocità variarono fra 236 e 925 millimetri.

Da tutto ciò la formola di Petroff resta maggiormente confermata, e nello stesso tempo si vede che essa riceve una importantissima applicazione pratica alla determinazione dei coefficienti d'attrito, per mezzo della sola conoscenza delle curve caratteristiche degli olii lubrificanti.

Per compiere la verifica della formola di Petroff non rimane che considerarla rispetto alla variazione della pressione specifica p. Generalizzando quanto si è visto nella parte IV, da numerose esperienze, Petroff ha stabilito che il trimonio denominatore della sua formola è inversamente proporzionale alla radice quadrata della pressione specifica; talchè indicando con K una costante di proporzionalità, si ha:

$$\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1} = \frac{K}{\sqrt{p}}.$$

Per verificare questa espressione sostituiamola nella formola (3'); allora si ha:

$$(7) \; .\; .\; .\; .\; \text{tang. } \alpha = \frac{\mu}{t - t_0} = \frac{\Delta E K}{U^2 Q \sqrt{p}}.$$

Da numerose esperienze eseguite dal Petroff sulla trasmissione del calore attraverso gli alberi e i cuscinetti, il coefficiente Δ di conducibilità del calore può essere rappresentato dalla formola:

$$(8) \; .\; .\; .\; .\; \Delta = 0{,}001225 + 0{,}000025 \, (t - t_0)$$

ove t è la temperatura di regime, t_0 quella dell'aria ambiente. Con questa formola e colla precedente si può calcolare il valore di $(t - t_0)$. Nella Tabella XVIII sono consegnati i valori di t e $(t - t_0)$ ottenuti da una parte col calcolo e dall'altra colla esperienza. Le piccole differenze fra i valori calcolati e gli esperimentali, dimostrano il grado di sufficiente approssimazione della formola (7), e nello stesso tempo confermano la formola di Petroff anche per quanto riguarda la pressione specifica.

La legge secondo cui varia la viscosità dei liquidi in genere, ed in particolare degli olii lubrificanti in funzione della temperatura, può essere rappresentata mediante un'equazione empirica; colla quale si possono calcolare le ordinate delle curve caratteristiche dei lubrificanti alle diverse temperature. Così secondo le esperienze di Poiseuille e di Jacopson la legge di viscosità dell'acqua è rappresentata dalla formola empirica:

$$\mu = \frac{\pi}{128135{,}282 \, (1 + 0{,}0336793 \, t + 0{,}0002209936 \, t^2)}$$

nella quale μ esprime il coefficiente di viscosità o d'attrito interno dell'acqua in milligrammi per millimetro quadrato, t la

temperatura in centigradi. La seguente Tabella dimostra il grado di approssimazione di questa formola [1]:

TEMPERATURA in centigradi	μ in milligrammi per millimetro quadrato	
	calcolati	esperimentali
0	0, 0001816	0, 0001817
20	0, 0001027	0, 0001030
30	0, 0000821	0, 0000821
40	0, 000672	0, 000667

Per l' olio di colza, secondo il Petroff, il coefficiente d'attrito interno sarebbe rappresentato dalla seguente formola:

$$\mu = \frac{1}{1{,}4 + 0{,}529\,t + 0{,}0507\,t^2}$$

e la seguente Tabella ne dimostra il grado di approssimazione [2]:

TEMPERATURA in centigradi	μ in milligrammi per millimetro quadrato	
	calcolati	esperimentali
0	0, 7142	0, 6930
6, 5	0, 1433	0, 1490
12, 4	0, 0635	0, 0752
13, 9	0, 0540	0, 0679
18, 1	0, 0362	0, 0344
24, 5	0, 0223	0, 0219
29, 5	0, 0163	0, 0165
31, 6	0, 0143	0, 0150

---

(1) Poggend. — Ann. Vol. 113, pag. 421.
(2) Poggend. — Ann. Vol. 113, pag. 410.

In generale la legge secondo cui varia la viscosità di un lubrificante in funzione della temperatura, può essere espressa da una equazione della forma:

$$(9) \ldots\ldots\ldots \mu = \frac{1}{a + b\,t + c\,t^2}.$$

Per determinare le tre costanti a, b, c, e verificare il grado di esattezza di questa equazione, bisogna ricorrere alla esperienza. Mediante un viscosimetro a tubo capillare si determineranno diversi valori $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ delle viscosità μ del lubrificante che si considera a diverse temperature $t_1\ t_2\ t_3 \ldots$ Introdotti questi valori nella equazione (9) si avranno tante equazioni quante esperienze; risolvendo queste equazioni col metodo dei minimi quadrati, si otterranno i migliori valori, i valori più plausibili delle costanti a, b, c. Introdotti i valori di queste nella (9), sostituendo in essa i valori delle temperature osservate, si calcoleranno le corrispondenti viscosità μ; se queste differiranno di piccole quantità dalle viscosità osservate, l'equazione (9) sarà verificata, e rappresenterà la legge delle viscosità dell'olio che si considera, con tanta maggiore approssimazione quanto più grande sarà il numero delle esperienze eseguite. Mediante l'equazione (9) verificata, si interpoleranno i coefficienti di viscosità μ alle diverse temperature, e si potranno anche calcolare quelle viscosità che alle elevate temperature difficilmente si possono ottenere colla esperienza.

Il sig. Heen, professore di fisica sperimentale nella Università di Liegi [1], in mancanza di sufficienti nozioni teoriche sugli urti molecolari da cui dipende l'attrito interno dei liquidi, si è pure occupato di determinare empiricamente la relazione fra il coefficiente d'attrito interno e la temperatura, e da numerose esperienze istituite è pervenuto al seguente risultato.

Indicando con F il coefficiente d'attrito interno di un liquido riferito alla unità di volume;

π la temperatura espressa per intervalli di 20° C.;

F_0 il coefficiente d'attrito interno alla temperatura di 10° C. presa come origine;

---

[1] *La Chaleur, par* Pierre de Heen. — Liége 1894, pagg. 220-221.

e la base del sistema logaritmico neperiano;

N ed A due costanti da determinarsi colla esperienza.

La formola di Heen rappresentatrice del coefficiente d'attrito interno in funzione della temperatura è:

$$(10) \ldots \quad F = \left[\frac{e^{\frac{\pi}{n}} + A F_0^{\frac{1}{n}} - 1}{A e^{\frac{\pi}{n}}} \right]^n$$

Per la determinazione di questa formola Heen ha fatto uso di un viscosimetro il quale non è altro che quello del Pagliani, modificato in guisa che il tubo capillare, anzi che per mezzo di tubetti di gomma, è direttamente congiunto, per fusione, ai due serbatoi di vetro, in un pezzo solo. Con tale apparecchio Heen esperimentò fino alla temperatura di 170° C.

VI

Scelta dei lubrificanti e determinazione del loro valore industriale — Applicazione ad alcune esperienze eseguite alla Società per le S. F. Meridionali R. A. in Bologna.

Molti industriali ritengono che il miglior lubrificante sia quello del minor costo: ciò non è sempre vero, come non è sempre vero che siano da preferirsi in tutti i casi i lubrificanti più fini e quindi del maggior prezzo. La scelta di un lubrificante deve essere ponderata e fatta in base a diverse considerazioni, affine di raggiungere lo scopo ultimo delle industrie, cioè il massimo effetto utile col minimo dispendio possibile. A conseguire questo scopo senza dubbio grandemente contribuisce l'impiego dei migliori sistemi di macchine motrici ed operatrici. Ma non basta: una macchina ben disegnata e costruita può dare un rendimento minore di un'altra d'inferiore fattura, quando manchi la massima cura nella lubrificazione. A parità di motori, trasmissione, macchine operatrici, la scelta di un più adatto lubrificante può apportare un notevole risparmio di lavoro, che in alcuni casi ha raggiunto perfino il 50 % (1), risparmio che può essere goduto in una diminuzione di carbone o in un aumento nel numero delle macchine operatrici in movimento.

(1) THURSTON - *Friction and lubrication.*

Un buon lubrificante influisce ancora sulla conservazione della superficie a contatto: quando il lubrificante non fa difetto nè in qualità, nè in quantità, esso si consuma in luogo e vece delle superficie, le quali perciò si conservano per più lungo tempo inalterate, con evidente vantaggio nella spesa di revisione, riparazione e manutenzione. Grande è pure l'influenza che il lubrificante esercita sul riscaldo delle superficie. La mancanza del lubrificante, l'otturamento dei fori per l'olio e degli stoppini, la sabbia, la polvere, la neve, l'acqua introdotta nell'olio, l'eccessiva pressione concentrata in pochi punti del cuscinetto, l'eccessiva estensione delle superficie, l'imperfezione nell'aggiustamento delle parti, la trascuratezza nelle visite, il congelamento dell'olio, gli spigoli acuti e taglienti dei canali conduttori dell'olio, costituiscono altrettante cause di riscaldi; ma è stato constatato con opportuni esperimenti, specialmente nelle ferrovie (1), che in molti casi la causa dei riscaldi è dovuta alla cattiva qualità degli olii, massime se questi sono essiccativi, gommosi e alterabili all'aria, tanto che cambiato l'olio i riscaldi scompaiono affatto.

Da tutto ciò si vede che prima di accettare ed applicare un lubrificante, per non incorrere a sconcerti nelle trasmissioni e nelle macchine, e più che tutto per non dovere scemare la velocità od interrompere il servizio, il che può tornare di enorme danno, ad esempio nelle ferrovie e nella marina, è di somma importanza avere la certezza delle buone proprietà dei lubrificanti, certezza che un privato potrà acquistare dalla fiducia e serietà del fornitore, ma che per le grandi amministrazioni di società ferroviarie e marittime, non può essere stabilita che in seguito a prove speciali. Nei capitolati d'onere per la fornitura dei lubrificanti le società ferroviarie stabiliscono chiaramente e tassativamente i caratteri degli olii ed i saggi a cui debbono essere assoggettati, per garantirsi che i prodotti consegnati siano pienamente conformi al prescritto.

Affinchè un lubrificante sia adatto ad una perfetta lubrificazione deve possedere le seguenti proprietà:

---

(1) SILVOLA - Opera citata.

1.° deve essere neutro, cioè affatto privo di acidi, perchè non abbia ad intaccare le superficie d' attrito.

2.° Non deve essere essiccativo, cioè sotto l' azione dell'aria non deve alterarsi lasciando depositi gommosi.

3.° deve avere una certa fluidità, congiunta a quella coesione sufficiente per non isfuggire dalle superficie d' attrito.

4.° Deve possedere un certo grado di capillarità, affinchè possa facilmente penetrare attraverso gli stoppini degli ungitori.

5.° deve possedere una certa adesività e tensione superficiale, affinchè possa aderire ed espandersi sulle superficie d'attrito.

6.° deve possedere una temperatura d' infiammabilità, superiore a quella a cui può essere portato.

7.° una temperatura di congelamento, inferiore a quella a cui può essere sottoposto.

8.° infine deve ridurre al minimo l' attrito totale e non produrre riscaldi.

Tali sarebbero i caratteri di un lubrificante perfetto; ma si comprende che non tutti questi caratteri sono indispensabili nella lubrificazione delle svariate macchine che si trovano nelle industrie: la prevalenza degli uni sugli altri dipende da circostanze speciali, fra le quali notevoli sono la velocità, la pressione e la temperatura a cui le superficie da lubrificare sono assoggettate: onde un lubrificante universale che possa soddisfare a tutti gli usi non è in generale conveniente, e la pratica ha stabilito diverse classificazioni, fra cui una accettata è quella del sig. C. M. Everest (1), secondo la quale le varie specie dei lubrificanti vengono classificate nel seguente modo:

a) *Per le piccole velocità e le grandissime pressioni:* grafite, sego ed altri grassi.

b) *Per le grandi pressioni e grandi velocità:* olio di spermaceti, olio di ricino, olio minerale pesante.

c) *Per le piccole pressioni e grandi velocità:* olio di spermaceti, petrolio, olio di oliva, di ravizzone e di cotone.

d) *Per le macchine ordinarie:* olio minerale pesante, altri olii vegetali.

e) *Pei cilindri a vapore:* olio minerale pesante.

---

(1) Everest - *About Lubrication from the Standpoint of a Manufacturer of Petroleum Lubricants*. World's Engineering Congress, Chicago, 1893.

Una osservazione importantissima sulla scelta dei lubrificanti riguarda le elevate temperature. Finchè i lubrificanti vengono applicati a bassa temperatura, come nelle trasmissioni e nelle ordinarie macchine operatrici, conservano facilmente le loro proprietà lubrificanti; le perdono invece in molti casi quando vengono applicati ad elevate temperature, come nei cilindri e nei cassetti delle macchine a vapore e a gas. Portati alla temperatura di 150° — 200° e più. quale appunto regna nei cassetti e nei cilindri delle macchine a vapore, taluni lubrificanti diventano così fluidi da sfuggire dalle superficie d'attrito, le quali perciò riducendosi ad immediato contatto, si aggrappano, si rigano, si deteriorano rapidamente, con gravissimo danno della economia della macchina e regolarità del movimento. Altri lubrificanti portati alle elevate temperature volatilizzano, lasciando depositi gommosi i quali, accrescendo per altra parte l'attrito, sono pure causa che le superficie si rigano, si aggrappano e rapidamente si consumano.

Tali inconvenienti si riscontrano in molti olii minerali non abbastanza raffinati. Gli olii animali e vegetali, l'olio d'oliva e di colza, il sego, il grasso, di cui si è fatto uso per tanto tempo nella lubrificazione dei cassetti e dei cilindri delle macchine a vapore, sono lubrificanti generosi; ma presentano il grave inconveniente della acidità, vale a dire, anche preventivamente disacidati, portati alle elevate temperature, danno luogo alla produzione di acidi i quali corrodono gli organi con cui vengono a contatto, formano depositi nerastri, specie di saponi di ferro, i quali ostruiscono le luci della distribuzione, ovalizzano i cilindri: questi acidi producono inoltre corrosioni nelle caldaie annesse alle macchine munite di condensatori a superficie, come pure in quelle delle locomotive, giacchè durante la marcia a controvapore una parte delle sostanze grasse lubrificanti, trascinata dai gas caldi e dal vapore, passa nell'interno della caldaia.

Gli olii minerali in generale sono neutri, cioè non contengono acidi, e sotto questo aspetto hanno il gran vantaggio sugli olii animali e vegetali e i grassi, di non intaccare le superficie: però, come si disse, molti di essi in presenza del vapore ad elevata temperatura si alterano facilmente, dando

luogo agli inconvenienti accennati. Per correggere i difetti degli uni e utilizzare le buone proprietà degli altri, in questi ultimi anni, particolarmente dalle amministrazioni ferroviarie, sono state introdotte le miscele di olii minerali con olii d'oliva, colza e sego, in proporzioni tali, da ottenere un lubrificante il quale, mentre non presenta notevoli inconvenienti per acidità, conserva fluidità e adesività tali da rimanere fra le superficie d'attrito in quello spessore sufficiente a mantenerle alla conveniente distanza, perchè abbia luogo una regolare lubrificazione. Una speciale osservazione va fatta per le macchine a gas: in esse il lubrificante non è solamente soggetto al calore intenso della esplosione, il quale supera quello dei cilindri a vapore, ma si trova ancora in contatto colle fiamme; onde più facilmente si altera e si carbonizza: per conseguenza, se per le macchine a vapore si possono impiegare miscele di olii minerali, con materie animali e vegetali, pei cilindri delle macchine a gas non si debbono impiegare che olii minerali puri.

Nell'applicazione dei lubrificanti conviene avere ancora riguardo alla scelta dei metalli usati nella costruzione o pel rivestimento dei cuscinetti. I metalli bianchi così detti *antifrizione* (leghe di stagno, antimonio e rame in proporzioni varie) rendono ottimi servigi, quando la pressione possa essere ripartita sopra una larga superficie, ed in questo caso presentano i seguenti vantaggi:

1.° Per una certa plasticità di cui sono dotati, si adattano meglio del bronzo ai perni, e conseguentemente meglio agiscono per ripartire la pressione ed evitare i riscaldi.

2.° Offrono superficie molto levigate e nello stesso tempo dotate di grande adesività, in virtù della quale i lubrificanti sono più facilmente trattenuti fra le superficie d'attrito.

3.° Sono economici [1].

---

[1] La compagnia ferroviaria dell'Est in Francia pel rivestimento delle boccole dei vagoni, fa uso di un metallo bianco così composto: si prepara da prima una lega di:

Stagno purissimo	Cg.	12
Antimonio	»	4
Rame	»	2
Totale	Cg.	18

avendo cura di fondere prima il rame poi aggiungere l'antimonio e per ultimo

Un' ultima avvertenza sull' impiego dei lubrificanti riguarda il modo di distribuirli alle superficie d'attrito; nel che si deve por mente alla scelta dei più opportuni sistemi di lubrificazione I principali sistemi di lubrificazione variano a seconda della specie dei lubrificanti, delle parti da lubrificare, e a seconda che queste sono fisse o mobili. Essi si possono distinguere in quattro classi e cioè: lubrificazione a grasso, lubrificazione per capillarità, lubrificazione a contagoccie, lubrificazione a circolazione continua, sovrabbondante e pura. Per ognuno di questi sistemi si hanno speciali ungitori, di cui in pratica si riscontrano numerosissime forme, da scegliersi caso per caso. La lubrificazione a grasso non dà risultati molto soddisfacenti, per gli inconvenienti già accennati; inoltre i grassi producono morchia, che deve essere espulsa a forza di calore, e quindi di lavoro consumato per attrito. La lubrificazione per capillarità presenta una grande semplicità; quella a contagoccie ha il singolare vantaggio di lasciar vedere la discesa dell'olio e poterla regolare a seconda del bisogno, in guisa che venga fatta lentamente a goccia a goccia, od in forma di getto continuo aprendo tutta la luce d'efflusso. Infine la lubrificazione a circolazione continua sovrabbondante e pura, ove possa essere applicata, rappresenta senza dubbio il miglior sistema; poichè con essa mentre da una parte l'alimentazione avviene in modo sicuro, senza interruzione e col massimo spessore, dall'altra l'olio, continuamente ricuperato, viene purificato da apposito filtro, totalmente preservato dal contatto della polvere.

Le particolarità di cui abbiamo parlato, servono per giudicare della scelta dei lubrificanti; ma non bastano per stabilire

---

lo stagno. Si uniscono poi insieme 20 Cg. di questa prima lega con 20 Cg. di stagno e si ottiene così un metallo bianco composto di:

83,333 di stagno,
11,111 di antimonio,
5,555 di rame.

La Compagnia dell' Est trovò che coll' uso del metallo bianco e degli olii minerali, mentre in precedenza succedevano numerosi rischi negli assi dei veicoli, su di un percorso di 505990 chilometri-boccole non si ebbe a deplorare alcun riscaldo, nè tendenza a riscaldo.

il valore che, industrialmente parlando, essi realmente posseggono. Il consumatore compra e il fornitore vende i lubrificanti, senza che nè l'uno nè l'altro sappia quale sia il vero valore industriale di coteste materie. Ora applicando quanto si è detto nelle precedenti parti intorno all'attrito, il problema di stabilire il valore industriale dei lubrificanti può essere risolto in un modo abbastanza semplice e pratico, come si verrà ad esporre.

Il valore industriale di un lubrificante è cosa ben diversa dal suo valore commerciale: questo dipende dalla legge della dimanda e della offerta, e quello dall' effetto utile che apporta nelle macchine. Sotto questo aspetto considerato, il valore industriale di un lubrificante è tanto più grande quanto più piccolo è il suo coefficiente d'attrito totale, ed a pari attrito, è tanto più grande quanto minore è il suo consumo in un certo tempo. Ciò è evidente. Possiamo quindi senz'altro stabilire che il valore di un lubrificante è in ragione inversa del suo coefficiente d'attrito totale, e della quantità di esso consumata in un certo tempo. Perciò indicando con f il coefficiente d'attrito totale, q il consumo in un certo tempo, k un coefficiente dipendente dalle particolarità dei lubrificanti, acidità, adesività, volatilità, riscaldi, ecc., V il valore industriale di un lubrificante, potremo porre:

$$V = \frac{k}{f q}.$$

Sostituendo per f il valore dato dalla formola di Petroff, sarà:

$$V = k \frac{p\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)}{\mu \, U \, q}$$

nella quale: μ è la pressione specifica o sulla unità di superficie, ε lo spessore dello strato lubrificante, μ il coefficiente d'attrito interno del lubrificante, λ e λ_1 i coefficienti d'attrito esterno, U la velocità lineare relativa delle due superficie a contatto. Indicando con: k_1, p_1, U_1, μ_1, q_1, λ^1, $\lambda^1{}_1$, le quantità che entrano in questa formola per il valore V_1 di un altro lubrificante, sarà:

$$V_1 = k_1 \frac{p. \left(\varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda^1} + \frac{\mu_1}{\lambda^1{}_1}\right)}{\mu_1 \, U_1 \, q_1}$$

e quindi:

$$(1) \ldots \frac{V}{V_1} = \frac{k}{k_1} \; \frac{p\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) \mu_1 \, U_1 \, q_1}{p_1\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda^1_1}\right) \mu \, U \, q}$$

la quale rappresenta l'espressione più generale del rapporto in cui stanno i valori industriali di due lubrificanti.

Da questa formola derivano le seguenti importanti conseguenze:

1.° Il valore di un lubrificante è tanto più grande, quanto maggiore è lo spessore di esso interposto fra la superficie, e minore la sua viscosità; onde collo spessore si può supplire al difetto di qualità dei lubrificanti. Questo principio è di una importanza speciale; e con esso si possono spiegare diversi fenomeni. Un battello striscia sull'acqua con una resistenza relativamente piccola, pel considerevole spessore dello strato fluido su cui galleggia. La ferrovia idraulica a slitta, che in via di esperimento figurava alla esposizione di Parigi del 1889, offriva pure una piccola resistenza perchè fra le slitte e le rotaie era interposto un conveniente strato d'acqua. Si hanno esempi di perni capaci di trasmettere grandi lavori con una resistenza piccolissima, perchè l'acqua sotto la pressione di un'enorme caduta li mantiene sollevati. Per mezzo dello stesso principio ci possiamo spiegare come secondo le esperienze di Bochet e di Westinghouse, l'attrito di strisciamento a secco scema col crescere della velocità; poichè l'aria dotata della massima fluidità interponendosi fra le ruote e le rotaie in uno strato di spessore continuamente crescente colla velocità, faceva scemare l'attrito più di quanto nol facesse crescere l'aumento di velocità. Nello stesso modo si spiega la lubrificazione ad aria e ad acqua ottenuta da Hirn. E negli esempi di forti spessori d'acqua, la resistenza d'attrito non sarebbe guari minore, se in luogo d'acqua si avesse olio. Ma nella maggior parte dei casi lo spessore dello strato lubrificante non può essere aumentato che entro ristretti limiti; perciò rispetto allo spessore, il valore di un lubrificante in via ordinaria non può essere che limitatamente accresciuto. Conviene però osservare che lo

spessore potendo scemare fino a zero, il valore del lubrificante può per questo lato notevolmente diminuire. Quindi volendo utilizzare tutto il valore di un lubrificante, si dovrà fare in modo che esso abbia e conservi il massimo spessore fra le superficie d'attrito; il che si otterrà coll'applicazione dei migliori sistemi di lubrificazione, fra i quali occupa certamente il primo posto quello a circolazione continua sovrabbondante e pura, che oramai si vede introdotto ed applicato da molti costruttori di macchine: poichè con questo sistema, pel fatto della circolazione continua, l'olio lubrificante acquista massimo spessore, e passando attraverso ad un filtro chiuso conserva per molto tempo la purezza e fluidità primitive.

2.° Il valore industriale di un lubrificante cresce col scemare dei coefficienti d'attrito esterno, e quindi riesce più grande quanto maggiore è la nettezza delle superficie d'attrito; ed anche qui si vede che alla diminuzione di valore prodotta dall'aumento dell'attrito esterno, si può supplire coll'accrescere lo spessore dello strato lubrificante; talchè aumentando cotesto spessore, particolarmente nelle forti pressioni sotto le quali diminuisce, l'influenza dell'attrito esterno può essere in gran parte neutralizzata.

3.° Infine, a parità delle altre circostanze, il valore industriale di un lubrificante è in ragione diretta della pressione specifica che esso può sopportare. Ma accrescendosi la pressione specifica, per difetto di consistenza, alcuni lubrificanti sfuggono dalle superficie d'attrito; onde si è costretti di aumentare l'estensione delle superficie stesse. In questo caso alla diminuzione del valore industriale che ne consegue, si potrà supplire coll'accrescere lo spessore dello strato lubrificante.

Nelle condizioni comuni della pratica, l'espressione (1) si può notevolmente semplificare e ridurre di facile applicazione. Il confronto di due olii istituendosi d'ordinario in identiche condizioni di velocità e di pressione, sarà:

$$U = U_1$$
$$p = p_1$$

Ed essendo la pressione costante, per quanto abbiamo visto

risultare dalle esperienze di Petroff, si potrà con sufficiente approssimazione ritenere:

$$\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1} = \varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda'} + \frac{\mu_1}{\lambda'_1} = \text{cost.}$$

Introducendo queste condizioni nella (1) il rapporto dei valori industriali di due lubrificanti sarà:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \frac{V}{V_1} = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{q_1}{q}$$

nella quale i valori μ e μ_1 verranno determinati note le curve caratteristiche dei due lubrificanti. E siccome, in questo caso, il rapporto $\frac{\mu_1}{\mu}$ è eguale a quello dei coefficienti d'attrito totale, così su di esso si faranno le opportune correzioni, giusta quanto si è detto nel capo precedente.

Se, come può ammettersi in molti casi, il binomio:

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$$

può essere trascurato a fronte di ε, allora il rapporto dei valori industriali dei due lubrificanti, sarà:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \frac{V}{V_1} = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{q_1}{q}$$

la quale espressione potrà applicarsi, quando si abbia argomento per giudicare degli spessori dei due lubrificanti.

Se le circostanze che influiscono sulle determinazioni dei coefficienti k e k_1 sono eguali, e i due spessori ε ed ε_1 si possono ritenere pure eguali, sarà:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \frac{V}{V_1} = \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{q_1}{q}$$

e finalmente se anche le quantità dei due lubrificanti, consumate a compiere lo stesso lavoro nello stesso tempo, sono eguali, sarà:

$$(5) \ldots\ldots\ldots \frac{V}{V_1} = \frac{\mu_1}{\mu}$$

ed in questo caso i valori industriali di due lubrificanti sono in ragione inversa della loro viscosità o dei loro coefficienti d'attrito interno.

Ottenuti colle formole (2), (3), (4) e (5) i rapporti fra i valori industriali di due lubrificanti, si avrà idea del loro effetto utile; e tenuto conto dei loro valori commerciali, sarà facile istituire un bilancio da cui riconoscere quali dei due lubrificanti sia più conveniente.

Il consumatore che ha a sua disposizione un opificio, può facilmente rendersi ragione della convenienza di un lubrificante rispetto ad un altro, procedendo ad un esperimento nel modo seguente. Indichiamo con: K_a il peso di combustibile in Cg. abbruciato per produrre un dato lavoro con un lubrificante A; K_b quello corrispondente con un altro lubrificante B; C il prezzo per Cg. del combustibile; q_a il peso in Cg. del lubrificante A consumato per compiere il detto lavoro; C_a il suo prezzo in lire per Cg. q_b e C_b il peso in Cg. e il prezzo in lire per Cg. del lubrificante B:

$$K_a C + q_a C_a$$

sarà la spesa richiesta coll'uso del lubrificante A,

$$K_b C + q_b C_b$$

sarà la spesa richiesta coll'uso del lubrificante B. La differenza Σ di queste due, cioè:

$$(5) \ldots\ldots \Sigma = (K_a - K_b)\, C + q_a C_a - q_b C_b$$

rappresenterà il guadagno o la perdita ad usare il lubrificante B piuttosto che A; e si avrà guadagno se sarà $\Sigma > o$, vi sarà perdita se sarà $\Sigma < o$; se poi sarà $\Sigma = o$, non vi sarà nè guadagno nè perdita ad usare l'uno piuttostochè l'altro lubrificante.

Esempio: In una filatura di 30000 fusi si consumano 25 Cg. di olio di colza al giorno. Con un eguale consumo d'olio di spermaceti si ha un risparmio di carbone di Cg. 1974 al giorno. Il prezzo del carbone è di L. 0,024 il Cg., quello dell'olio di colza L. 1,43, e quello di spermaceti di L. 3 per Cg. Applicando la (5) si ha:

$$\Sigma = 1974 \times \text{L. } 0{,}024 - 25\,(3 - 1{,}43) = \text{L. } 8{,}126$$

cioè coll'impiego dell'olio di spermaceti si realizza un'economia giornaliera di L. 8,126, la quale, in un anno industriale di 300 giorni, ammonta a L. 2437,80.

In un'altra filatura dello stesso numero di fusi, sostituendo olio di spermaceti al colza, si realizza una economia in carbone di soli Cg. 836, essendo eguali i consumi d'olio e i prezzi, si ha:

$$\Sigma = 836 \times 0{,}024 - 25\,(3 - 1{,}43) = - \text{L. } 19{,}19$$

cioè in questo caso la sostituzione dell'olio di spermaceti non sarebbe affatto conveniente.

Se il lavoro motore viene tutto impiegato a vincere la resistenza d'attrito, il peso di combustibile abbruciato per unità di lavoro, potrà ritenersi proporzionale al coefficiente d'attrito totale, e per quel che si è detto in precedenza, proporzionale anche al coefficiente di viscosità o d'attrito interno del lubrificante, determinato per mezzo delle curve caratteristiche; si avrà quindi:

$$\frac{k_a}{k_b} = \frac{f_a}{f_b} = \frac{\mu_a}{\mu_b}$$

con che la (5) diviene:

$$(6) \ldots \Sigma = k_a \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_a}\right) C + q_a C_a - q_b C_b .$$

Questa formola si potrà applicare per determinare il valore di due lubrificanti in un opificio mettendo in moto la sola trasmissione colle cinghie sulle puleggie folli; e potrà applicarsi anche ad un treno ferroviario, quando si trascuri la resistenza dell'aria e l'attrito volvente delle ruote sulle rotaie, ovvero si ritenga che queste resistenze esercitino eguale influenza per entrambi gli olii.

Per fare una applicazione pratica del primo metodo esposto per la determinazione del valore industriale dei lubrificanti, riassunto nelle formole (2), (3), (4) e (5), mi varrò dei risultati di alcune interessanti esperienze sopra diversi olii lubrificanti, eseguite nello scorso anno alla Società per le S. F. Meridionali R. A. in Bologna, dai signori dott. G. Baroni e ing. C. Rusconi, ai quali per la squisita gentilezza usatami nel comunicarmi

questi risultati, e pel consenso avuto di pubblicarli, rendo i più vivi ringraziamenti.

Allo scopo di stabilire se fosse conveniente sostituire alla attuale miscela fabbricata dall' Amministrazione Ferroviaria R. A. per la lubrificazione dei cilindri e dei cassetti delle locomotive, un altro lubrificante da acquistarsi direttamente dall' industria, vennero esaminati diversi campioni di olii presentati dalle Ditte più note. Le esperienze furoro eseguite sia in laboratorio come anche sulla locomotiva. Quelle di laboratorio ebbero per iscopo:

1.° di stabilire se i lubrificanti fossero semplicemente olii naturali raffinati, o miscele;

2.° di verificare la depurazione, stabilire il punto di congelamento, d' infiammabilità e la densità;

3.° di determinare le variazioni di viscosità al variare della temperatura, aumentando questa fino ad un grado il più possibilmente elevato;

4.° acquistare una idea del potere aderente degli olii alle superficie metalliche al variare della temperatura.

La depurazione fu studiata principalmente determinando l' acidità e il tenore in *goudron* (1). La densità col metodo della boccetta, la temperatura di congelamento mediante miscele frigorifere, e quella d' infiammabilità coll' apparecchio Blazy. I risultati delle esperienze di depurazione, densità e temperatura sono registrati nella tabella XIX.

La viscosità venne determinata col viscosimetro del Pagliani e i risultati ottenuti, espressi per mezzo delle curve caratteristiche dei diversi olii esaminati, sono indicati nella figura 4.ª tavola I.

Per lo studio della adesività degli olii alle superficie metalliche, si fece uso di una piastrina di ghisa (fig. 5.ª, tavola I)

---

(1) La determinazione del *goudron* è stata fatta aggiungendo al volume dell' olio minerale $\frac{1}{20}$ d' acido solforico a 66° Baumé, scaldando a bagno maria fino a 70° C., e agitando. Dopo 24 ore di riposo venne verificato il volume del precipitato: il rapporto di questo al volume d' olio impiegato è ciò che è chiamato *tenore in goudron*.

accuratamente spianata nelle due faccie, cogli spigoli smussati per modo da terminare a coltello, ed inferiormente tagliata secondo un angolo saliente per facilitare lo stillicidio dell'olio. Immersa la piastrina nell'olio da esperimentare, avendo l'avvertenza di fare coincidere un'apposita linea in essa tracciata, con la superficie libera del liquido, vi si mantenne per tutto il tempo necessario perchè raggiungesse la temperatura voluta; poi estratta venne posta in una stufa ad eguale temperatura di quella del liquido, e dopo cinque minuti pesata: dal peso ottenuto, tolta la tara, si aveva il peso dell'olio rimasto sulla piastrina. La superficie di questa era di 70 cq. e le esperienze vennero eseguite alle temperature fra 70° e 150°: i risultati ottenuti sono raccolti nel diagramma fig. 6.ª tavola I, nel quale le ascisse rappresentano le temperature e le ordinate i pesi degli olii in milligrammi, rimasti aderenti alla piastrina.

Dal diagramma delle curve caratteristiche, si vede che le viscosità dei diversi olii minerali scemano rapidamente col crescere della temperatura, mentre per l'olio d'oliva e la miscela *R. A.* le variazioni sono assai più lente. Si vede ancora che rispetto alla viscosità l'olio migliore è quello d'oliva, poi viene la miscela *R. A.*, poi l'olio minerale scuro, indi seguono gli olii *SA* (00); *PCO; VV, FC; FSS.* L'olio d'oliva sarebbe quindi da preferirsi a tutti gli altri. È però da osservarsi che, sebbene presenti qualità lubrificanti ottime e le conservi in parte anche alle elevate temperature, esso non può tuttavia essere applicato per l'azione corrosiva degli acidi che contiene: perciò nello studio comparato dei diversi lubrificanti, l'olio d'oliva non può essere considerato altro che come termine di confronto. Pertanto riferendoci a questo olio, appare manifesto come la miscela *R. A.*, (costituita di 5 parti di olio minerale scuro, 3 d'oliva ed 1 di sevo), sia razionalmente composta; poichè mentre è neutra, o contiene una innocua quantità di acidi, ha la sua caratteristica di viscosità che si scosta notevolmente dall'olio minerale scuro, per avvicinarsi a quella dell'olio d'oliva; e sotto questo aspetto la miscela *R. A.* sarebbe il lubrificante da preferirsi a tutti gli altri.

Dal diagramma delle adesività (fig. 6.ª) abbiamo risultati differenti. Da questo si vede che il peso d'olio rimasto aderente

alla piastrina, scema col crescere della temperatura, e che oltre i 100°, le curve delle adesività disponendosi pressochè parallele all'asse della temperatura, questo peso si riduce parimenti pressochè costante per ciascun olio. Si vede inoltre che le costanti minori sono per l'olio d'oliva e per la miscela; più elevate sono quelle degli olii minerali. Ora il maggiore peso di materia rimasta sulla piastrina, purchè atta alla lubrificazione, costituisce una condizione favorevole a questa; poichè quanto più grande è la quantità di materia che rimane sulla piastrina, è a ritenersi che più facilmente il lubrificante resti fra le superficie d'attrito, acquisti uno spessore più grande, mantenga a maggior distanza le superficie stesse, e quindi riduca minore il coefficiente d'attrito e minore il consumo delle parti a contatto. Ritenuto pertanto il maggior peso di materia che aderisce alla piastrina, come un coefficiente di maggior valore dei lubrificanti, in ordine alla adesività risulterebbe questa classificazione: i migliori sarebbero gli olii *FC, FSS, PCO*, poi verrebbero l'olio *VV* e l'olio minerale scuro, ed infine la miscela e l'olio d'oliva. Ma è da notarsi una circostanza molto importante. Dalle stesse prove di adesività sulla piastrina, e da quelle fatte all'atto pratico, lubrificando i cassetti e i cilindri di alcune locomotive, è risultato che molti degli olii minerali esaminati vennero riscontrati inadatti alla lubrificazione o perchè si decomponevano alle elevate temperature, o perchè rigavano enormemente le superficie lubrificate. Per conseguenza la maggior parte dei detti lubrificanti rimase esclusa, e la scelta cadde sopra due soli: l'olio *VV* e la miscela *RA*, i quali si mostrarono egualmente adatti per la lubrificazione dei cassetti e dei cilindri delle locomotive.

Rimane quindi a stabilire quale di questi due sia più conveniente. Intanto osserviamo che mentre per le adesività abbiamo dati fino a 150°, le viscosità si arrestano a 95°. Volendo quindi istituire un confronto fra i due olii alla massima temperatura, sarebbe opportuno avere anche le viscosità fino a 150°. Mancandoci questi dati dalla esperienza, potremo procurarceli, con sufficiente approssimazione, determinando le equazioni rappresentanti le leggi di variazione delle viscosità dell'olio *VV* e della miscela, giusta quanto si è detto nel capo precedente.

A rappresentare la legge delle viscosità assumiamo l'equazione della forma:

$$(a) \dots\dots\dots \mu = \frac{1}{a + bt + ct^2}$$

nella quale μ è il coefficiente di viscosità, t la temperatura corrispondente a, b, c tre costanti da determinarsi colla esperienza. Per semplicità di calcolo esprimiamo la temperatura per intervalli di 15° in 15°, ed assumiamo come zero della scala la temperatura di 35°. Inoltre indicando con μ_0 la viscosità a 35° ossia per $t = o$, poniamo:

$$(7) \dots\dots\dots\dots a = \frac{1}{\mu_0}$$

Con ciò l'equazione (a) diviene:

$$(8) \dots\dots\dots \mu = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + bt + ct^2}.$$

Determiniamo ora le costanti b e c. Pongasi:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} = P$$

allora la (8) diviene:

$$bt + ct^2 = P.$$

Se b, c sono i valori più plausibili da determinarsi corrispondentemente ad un certo numero di valori esperimentali di P e t, l'errore sarà:

$$bt + ct^2 - P$$

e per la teoria dei minimi quadrati dovendo essere:

$$\Sigma\,(bt + ct^2 - P)^2 = minimum$$

sarà:

$$\frac{d}{db}\,\Sigma\,(bt + ct^2 - P)^2 = 0$$

$$\frac{d}{dc}\,\Sigma\,(bt + ct^2 - P)^2 = 0$$

ossia:

$$b \Sigma t^2 + c \Sigma t^3 - \Sigma P t = 0$$

$$b \Sigma t^3 + c \Sigma t^4 - \Sigma P t^2 = 0$$

da cui si ricava:

$$(9) \ldots\ldots b = \frac{\Sigma P t \,.\, \Sigma t^4 - \Sigma P t^2 \,.\, \Sigma t^3}{\Sigma t^2 \,.\, \Sigma t^4 - (\Sigma t^3)^3}$$

$$(10) \ldots\ldots c = \frac{\Sigma t^2 \,.\, \Sigma P t^2 - \Sigma t^3 \,.\, \Sigma P t}{\Sigma t^2 \,.\, \Sigma t^4 - (\Sigma t^3)^3}.$$

Se con questi valori la (8) interpreta con sufficiente approssimazione i dati esperimentali, essa potrà ritenersi rappresentare la legge cercata.

Applichiamo ora l'equazione (8) alla miscela *R. A.* I dati esperimentali che per questa si hanno dal diagramma delle viscosità, sonó:

$$t_0 = 0 \ (35^\circ); \quad \mu_0 = 9{,}9$$
$$t_1 = 1 \ (50^\circ); \quad \mu_1 = 4{,}8$$
$$t_2 = 2 \ (65^\circ); \quad \mu_2 = 3{,}2$$
$$t_3 = 3 \ (80^\circ); \quad \mu_3 = 2{,}1$$
$$t_4 = 4 \ (95^\circ); \quad \mu_5 = 1{,}3.$$

Con questi dati dalle (7), (9) e (10) si ha:

$$\frac{1}{\mu_1} = 0{,}10101$$

$$b = 0{,}04875$$

$$c = 0{,}02866;$$

onde l'equazione che rappresenta la legge delle viscosità della miscela, risulta:

$$(11) \ldots \mu = \frac{1}{0{,}10101 + 0{,}04875\, t + 0{,}02866\, t^2}.$$

Calcolando con questa i valori della viscosità alle diverse temperature esperimentali, si ottengono i risultati indicati nella tabella seguente:

Temperatura in C.	Valori di μ in decimilligrammi per la miscela *R. A.*		
	Esperimentali	Calcolati colla (11)	Differenze
35°	9, 90	9, 90	0
50°	4, 80	5, 59	+ 0, 79
65°	3, 20	3, 19	— 0, 01
80°	2, 10	1, 97	— 0, 13
95°	1, 30	1, 32	+ 0, 02

Seguendo l'ordine con cui diminuiscono le differenze fra i valori di μ notati in questa tabella, si vede che la curva rappresentata dalla (11) serpeggia intorno alla vera, compiendo oscillazioni che, alle elevate temperature, sono insignificanti. Perciò può ritenersi che a queste temperature, l'equazione (11) rappresenti con sufficiente approssimazione la legge di viscosità della miscela, e dia risultati attendibili. Ponendo ora nella (11) per t l'intervallo corrispondente alla temperatura di 150°, cioè $t = 7{,}66$, si ottiene per la viscosità a questa temperatura $\mu = 0{,}46$ [1].

---

[1] Trattando col metodo dei minimi quadrati l'equazione (a) nel modo più generale, senza introdurre alcuna condizione, detto n il numero delle esperienze, si ottengono le tre equazioni seguenti:

$$(A) \left\{ \begin{aligned} na + b\Sigma t + c\Sigma t^2 &= \Sigma \frac{1}{\mu} \\ a\Sigma t + b\Sigma t^2 + c\Sigma t^3 &= \Sigma \frac{t}{\mu} \\ a\Sigma t^2 + b\Sigma t^3 + c\Sigma t^4 &= \Sigma \frac{t^2}{\mu} \end{aligned} \right.$$

risolvendo le quali si hanno i valori delle tre costanti a, b, c. Per altri studi avendo avuto bisogno di conoscere le viscosità della miscela *R. A.* alle basse temperature, servendomi del viscosimetro Pagliani, appartenente alla R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna, e dello stesso tubo capillare ado-

Per l'olio *VV* prendendo l'origine delle temperature a 40° ed esprimendo queste per intervalli di 5° in 5°, dal diagramma delle viscosità si hanno i seguenti dati sperimentali:

$$t_0 = 0\ (40°)\ ;\ \mu_0 = 50$$
$$t_1 = 2\ (50°)\ ;\ \mu_1 = 26$$
$$t_2 = 5\ (65°)\ ;\ \mu_2 = 15$$
$$t_3 = 8\ (80°)\ ;\ \mu_3 = 7,3$$
$$t_4 = 11\ (95°)\ ;\ \mu_4 = 4,3.$$

---

perato nelle sue esperienze dal dott. Baroni, e da esso gentilmente prestatomi, ho determinato le viscosità della miscela alle temperature di 20°, 25° e 30°, e per collegarmi colle esperienze del Baroni anche quella a 35°. Applicando le equazioni (*A*) ed esprimendo le temperature per intervalli di 5° in 5°, collo zero a 20°, la legge di viscosità della miscela risulta rappresentata dalla seguente equazione:

$$(11') \ldots\ldots \mu = \frac{1}{0{,}054753 + 0{,}00469\,t + 0{,}00277\,t^2}$$

Le viscosità calcolate con questa formola in confronto colle esperimentali, sono consegnate nella seguente tabella:

Temperatura in C.	Valori di μ in decimilligrammi		
	Esperimentali	Calcolati	Differenze
20°	22, 80	18, 26	— 4, 54
25°	16, 90	16, 07	— 0, 83
30°	12, 80	13, 12	+ 0, 33
35°	9, 90	10, 66	+ 0, 76
50°	4, 80	5, 47	+ 0, 67
65°	3, 20	3, 11	— 0, 09
80°	2, 10	1, 96	— 0, 14
95°	1, 30	1, 33	+ 0, 03

Ponendo poi nella equazione (11') la temperatura corrispondente a 150°, cioè $t = 26$, per la viscosità a questa temperatura si ottiene $\mu = 0{,}48$, valore prossimamente eguale a quello calcolato nel testo. Questo risultato, e l'ordine con cui si seguono nella tabella precedente le differenze tra i valori di μ esperimentali e calcolati, confermano come l'equazione stabilita nel testo, sia più che sufficiente a rappresentare la viscosità della miscela alle alte temperature.

Con questi dati applicando le formole (7), (9), (10) si ha:

$$\frac{1}{\mu_0} = 0{,}0200$$
$$b = 0{,}00253$$
$$c = 0{,}00152$$

onde l'equazione rappresentante la viscosità dell'olio *V V*, risulta:

$$(12) \; . \; . \; . \; \mu = \frac{1}{0{,}020 + 0{,}00253\, t + 0{,}00152\, t^2}.$$

Con questa equazione, calcolando i valori di μ alle diverse temperature esperimentali, si ottengono i risultati indicati nella seguente tabella:

Temperatura in C.	Valori di μ in decimilligrammi per l'olio *V V*		
	Esperimentali	Calcolati	Differenze
40°	50	50	0
50°	26	32, 11	+ 6, 11
65°	15	14, 15	— 0, 85
80°	7, 3	7, 27	— 0, 03
95°	4, 3	4, 23	+ 0, 01

Anche da questa tabella si può ritenere che l'equazione (12) interpreti con sufficiente approssimazione le viscosità dell'olio *V V* alle alte temperature, e per queste dia risultati attendibili. Ponendo ora nella equazione (12) per t l'intervallo corrispondente alla temperatura di 150°, cioè $t = 22$, si ottiene $\mu = 1{,}26$.

Calcolate le viscosità della miscela e dell'olio *V V* alla temperatura di 150°, passiamo a determinare i valori industriali di questi due lubrificanti. A tale scopo applicheremo la formola (3), cioè:

$$(3') \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{V_m}{V_v} = \frac{k_m}{k_v} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_v} \cdot \frac{\mu_v}{\mu_m} \cdot \frac{q_v}{q_m}.$$

Dalle prove di locomotiva essendo risultato che entrambi gli olii lubrificano egualmente bene, potremo ritenere che i coefficienti k_m e k_v per la miscela e per l'olio *VV* siano eguali. Inoltre dalle prove di adesività, in via di approssimazione, si potrà ammettere che gli spessori ε_m ed ε_v della miscela e dell'olio *VV*, siano proporzionali ai pesi di materia rimasta sulla piastrina alla temperatura di 150°. Questa ipotesi condurrà forse a stabilire per l'olio *VV* un valore maggiore del vero; ma di ciò, se sarà opportuno, si terrà il dovuto conto alla fine del calcolo. Riterremo quindi come risulta dal diagramma delle adesività:

Per la miscela, $\varepsilon_m = 53$.
Per l'olio *VV*, $\varepsilon_v = 90$.

Infine da speciali esperienze fatte sulla locomotiva con oliatori Nathan, risulta che il consumo dei due lubrificanti per locomotiva chilometro è:

Per la miscela, $q_m =$ gram. 10,02.
Per l'olio *VV*, $q_v =$ gram. 7,752.

Sostituendo ora questi diversi valori nella (3'), il rapporto fra il valore industriale V_m della miscela e quello V_v dell'olio *VV*, risulta:

$$\frac{V_m}{V_v} = \frac{53}{90} \times \frac{1,26}{0,46} \times \frac{7,752}{10,02} = 1,247.$$

Cioè il valore industriale della miscela è maggiore di quello dell'olio *VV*. Ora la miscela costa all'Amministrazione *R. A.* L. 0,55 il Cg., quindi il valore dell'olio *VV* non può essere superiore a L. 0,44. Invece il prezzo commerciale di quest'olio è di L. 0,80 per Cg., quindi resta pienamente confermato, quanto per altra via è stato stabilito dall'Amministrazione *R. A.*, e cioè che di tutti i lubrificanti esaminati, il migliore è certamente la miscela da essa fabbricata.

VII

Considerazioni finali e conclusione.

Da quanto si è esposto nelle precedenti parti, discende cbe lo studio dell'attrito, secondo le nuove vedute, riposa sopra due formole fondamentali: quella di Poiseuille e quella di Petroff. Entrambe vengono dedotte da un processo analitico razionale, e sono confermate dalla esperienza: la prima esprimendo le leggi da cui dipende l'attrito interno dei liquidi, ha indicato il modo di calcolare con rigore scientifico la viscosità dei liquidi, mediante la costruzione dei viscosimetri a tubo capillare; la seconda sintetizzando i risultati di molti esperimentatori, stabilisce la funzione secondo cui variano la resistenza ed il coefficiente d'attrito. Osserviamo però che la formola di Petroff, basandosi sulle leggi di Newton relative all'attrito dei liquidi negli spazii capillari, confermate da quelle di Poiseuille, e includendo in sè quale elemento principale il coefficiente d'attrito interno dei lubrificanti, riassume tutta la moderna questione dell'attrito. Essa quindi acquista un valore indiscutibile, e costituisce un vero progresso, il quale non può a meno di esercitare una influenza speciale nella scienza e nella pratica.

La cinetica delle macchine, come quella che è fondata in gran parte sulle leggi dell'attrito, per la prima risente l'influenza di questa nuova formola; e tutti i principii da essa stabiliti in base alla costanza del coefficiente d'attrito, subiscono notevoli cambiamenti. A porgere un saggio delle modificazioni che

la formola di Petroff apporta nei calcoli della cinetica delle macchine, faremo alcune considerazioni.

Si ritiene comunemente che il moto di un corpo lungo un piano inclinato sia uniformemente accelerato. Indicando con: P il peso del corpo, i l'angolo d'inclinazione del piano, f il coefficiente d'attrito, F la forza acceleratrice, U la velocità che acquista il grave dopo un certo tempo t, g l'accelerazione della gravità, come è noto, si ha:

$$F = P\,(\text{sen}\,i - f\cos i) = \frac{P}{g}\,\frac{d\,U}{d\,t}.$$

Ponendo per f il valore dato dalla formola di Petroff, si ha:

$$F = P\left(\sin i - \frac{\mu\,U\cos i}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}\right)$$

la quale ci dice che la forza acceleratrice dipende dalla velocità, e però il moto non è uniformemente accelerato.

Si ha poi:

$$\frac{d\,U}{d\,t} = g\left(\sin i - \frac{\mu\,U\cos i}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}\right)$$

da cui

$$\frac{d\,U}{g\left(\sin i - \frac{\mu\,U\cos i}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}\right)} = d\,t$$

La quale è l'equazione differenziale del moto del grave. Osserviamo che la viscosità μ, e i coefficienti d'attrito esterno λ e λ_1, dipendono dalla temperatura d'attrito e questa a sua volta dalla velocità; così pure lo spessore ε dello strato lubrificante dipende dalla velocità. Ora essendoci sconosciute le funzioni secondo cui variano colla velocità μ, λ, λ_1 ed ε, non si può passare alla integrazione della equazione precedente, e quindi la legge della caduta di un grave lungo un piano inclinato rimane tuttora incognita [1].

---

[1] Sarebbe interessante che nel varo delle navi si facessero esperienze (e ciò non sarebbe difficile mediante apparecchi elettrici) colle quali misurare gli spazi e i tempi del moto della nave e studiarne la legge della discesa.

Per avere un' idea di questa legge in qualche caso particolare, facciamo una ipotesi. Supponiamo che in via di approssimazione μ, ε, λ, λ_1 e p si possano ritenere costanti, il che è quanto dire che il coefficiente d'attrito f varii soltanto con la velocità. Allora posto:

$$g \text{ sen } i = A$$

$$\frac{g\mu \cos i}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)p} = B$$

si avrà:

$$\frac{dU}{A - BU} = dt.$$

Integrando questa equazione, sì che per $t = 0$ sia $U = 0$, si ha:

$$U = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

la quale ci dice che il moto del corpo tende a diventare uniforme, e diviene tale dopo un tempo infinito. Indicando poi con s lo spazio descritto dal corpo nel tempo t, sarà:

$$s = \int U dt = \int \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)dt$$

la quale integrata sì che per $t = 0$ sia $s = 0$, dà:

$$s = \frac{A}{B^2}\left(e^{-Bt} + Bt - 1\right).$$

È principio generale di meccanica che la resistenza d'attrito è direttamente proporzionale alla pressione normale. Ora applicando la formola di Petroff, si può vedere che ciò non è sempre vero, e in diversi casi la legge è assolutamente diversa.

Indicando con: F la resistenza d'attrito, P la pressione normale, f il coefficiente d'attrito è:

$$F = f P$$

sostituendo per f il valore dato dalla formola di Petroff, si ha:

$$F = \frac{P \mu U}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}$$

e per semplicità trascurando $\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$ a fronte di ε, si ha:

$$F = P \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{U}{p}.$$

Ora ammessa la velocità U costante, ε essendo dipendente da questa, perchè sussista la diretta proporzionalità tra F e P, bisogna che il rapporto $\frac{\mu}{p}$ sia costante; e siccome μ dipende dalla temperatura d'attrito, mentre p ne è indipendente, così dovranno essere separatamente $p =$ cost., $\mu =$ cost.

Per la prima condizione, detta Q la superficie di contatto, sarà:

$$p = \frac{P}{Q} = \text{cost.}$$

ossia perchè sussista la detta proporzionalità, in un perno soggetto a pressione variabile, si dovrebbe far crescere l'estensione della superficie in proporzione della pressione, il che non è punto realizzabile. Per la seconda condizione la temperatura dello strato lubrificante dovrebbe restare costante, ossia la quantità di calore assorbito dalle diverse parti della macchina dovrebbe essere pure costante. Ora se si indica con Δ il coefficiente di conducibilità termica, t la temperatura dello strato lubrificante, t_0 quella dell'aria esterna, E l'equivalente dinamico del calore, si ha:

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{U^2 P}{p E} = \Delta (t - t_0)$$

dalla quale si vede che t non può restare costante altro che intendendo che la temperatura t_0 dell'aria esterna diminuisca a misura che P aumenta, il che non si verifica nella pratica. Dunque nel caso di pressione variabile la resistenza d'attrito non è direttamente proporzionale alla pressione normale.

Indichiamo con F ed F_1, P e P_1, t e t_1, μ e μ_1, ε ed ε_1 rispettivamente due valori della resistenza d'attrito, della pressione normale, della temperatura d'attrito, della viscosità e dello spessore di un lubrificante, per una medesima velocità U ed una stessa superficie Q, avremo:

$$F = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{U}{p} P; \quad F_1 = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \frac{U}{p_1} P_1$$

e quindi

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\varepsilon\, p}{\varepsilon_1 p_1} \times \frac{\mu_1}{\mu} \times \frac{P_1}{P}$$

Per altra parte essendo:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p}}$$

si ha:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\mu_1}{\mu} \times \frac{P_1}{P} \sqrt{\frac{p}{p_1}}$$

Questa equazione dimostra che $\frac{F_1}{F}$ non può essere eguale a $\frac{P_1}{P}$ altro che quando le temperature t e t_1 variano in modo che sia:

$$\frac{\mu_1}{\mu}\sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1$$

Se poi è $t = t_1$, $\mu = \mu_1$ si ha:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{P_1}{P} \sqrt{\frac{p}{p_1}}$$

e ponendo

$$p = \frac{P}{Q};\; p_1 = \frac{P_1}{Q}$$

risulta:

$$\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{P_1}{P}}$$

cioè: *le resistenze d'attrito sono inversamente proporzionali alle pressioni normali.* Questo rapporto fra le pressioni e le resistenze d'attrito può ancora essere mantenuto con sufficiente approssimazione, se le temperature t e t_1 siano di poco differenti, come appunto avviene molto spesso nella pratica.

Supponiamo che la lubrificazione sia abbondante, la pressione, la velocità, la temperatura dell'aria esterna e quella dei diversi punti delle superficie d'attrito siano costanti, vediamo la relazione che passa fra la pressione normale e la resistenza

d' attrito in questo caso. Indicando con μ la viscosità alla temperatura t di un olio preso come termine di confronto, μ_1 la viscosità di un altro olio, A il rapporto di queste viscosità, potremo porre:

$$A\,\mu = \mu_1$$

Indicando poi con ε_0, p_0 lo spessore dello strato lubrificante e la pressione specifica pel primo olio, ε e p lo spessore e la pressione specifica per l' altro olio, sarà:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{p}}$$

e posto:

$$\varepsilon \sqrt{p_0} = \alpha$$

sarà:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{p}}.$$

Detta F la resistenza d' attrito del secondo olio, sarà:

$$F = \frac{\mu_1 U}{\varepsilon p} P = \frac{A\,\mu\,U}{\alpha \sqrt{p}} P$$

ed essendo:

$$p = \frac{P}{Q}$$

si avrà:

$$F = \frac{A\mu U}{\alpha} \sqrt{P}\sqrt{Q}.$$

Essendo poi E l' equivalente meccanico del calore, Δ il coefficiente di conducibilità termica, $t - t_0$ la differenza di temperatura dello strato lubrificante e dell'aria esterna, avremo:

$$\frac{A\mu U^2}{\alpha E} \sqrt{P} . \sqrt{Q} = \Delta\,(t - t_0).$$

Sostituendo per μ la sua espressione in funzione della temperatura, cioè:

$$\mu = \frac{1}{a + bt + ct^2}$$

avremo:

$$A\,U^2 \frac{\sqrt{P}\,.\,\sqrt{Q}}{\alpha\Delta E} = (a + b\,t + c\,t^2)\,(t - t_0)$$

d'altra parte si ha:

$$\frac{F\,U}{E} = \Delta\,(t - t_0)$$

$$t = \frac{F\,U}{E\Delta} + t_0$$

quindi l'espressione precedente diviene:

$$\frac{A\,U}{\alpha}\sqrt{Q}\sqrt{P} = \left\{a + b\left(\frac{F\,U}{E\Delta} + t_0\right) + c\left(\frac{F\,U}{E\Delta} + t_0\right)^2\right\}F.$$

Ponendo poi:

$$\mu_0 = \frac{1}{a + b\,t_0 + c\,t_0^2}$$

e ordinando rispetto ad F, si ha:

$$F^3 + (b + 2\,c\,t_0)\,\frac{E\Delta}{c\,U}\,F^2 + \frac{E^2\Delta^2}{\mu_0\,c\,U^2}\,F = \frac{A\,E^2\Delta^2}{\alpha\,c\,U}\sqrt{Q\,.\,P}$$

la quale esprime la cercata relazione fra la resistenza d'attrito e la pressione normale.

Infine se in alcune parti manca il lubrificante sì che il perno venga a contatto immediato col cuscinetto, la relazione fra la resistenza d'attrito e la pressione normale è pure diversa.

Indicando con P_1 e P_2, f_1 ed f_2 rispettivamente le pressioni normali e i coefficienti d'attrito totale per la parte non lubrificata e per quella separata dallo strato lubrificante, la resistenza d'attrito sarà:

$$F = f_1\,P_1 + f_2\,P_2$$

e denotando con P la pressione totale sarà:

$$F = \left(f_1\,\frac{P_1}{P} + f_2\,\frac{P_2}{P}\right)P.$$

Da questa formola si vede che se f_1 ed f_2 sono eguali, o poco differenti fra loro, si può ritenere F proporzionale a P; ma se i coefficienti d'attrito sono diversi, il valore di F dipenderà evidentemente dalla ripartizione del carico totale P fra P_1 e P_2.

ESEMPIO: sia:

$$P_1 = 0{,}1\ P, \quad P_2 = 0{,}9\,P, \quad f_1 = 0{,}02\,, \quad f_2 = 0{,}004$$

con questi dati la formola precedente dà:

$$F = 0{,}0236\,P$$

Se invece si pone:

$$P_1 = 0{,}9\,P, \quad P_2 = 0{,}1\,P$$

cogli stessi coefficienti d'attrito, si ha:

$$F = 0{,}1802\,P$$

cioè un valore 7,6 volte più grande del primo.

Passando dalle considerazioni teoriche a quelle d'ordine pratico, la formola di Petroff indica un nuovo indirizzo, un programma nuovo da seguirsi nello studio pratico dell'attrito. Innanzi tutto essa conferma l'intima relazione fra il coefficiente d'attrito interno o la viscosità e l'attrito totale o cinetico; talchè determinate con opportune esperienze al viscosimetro le curve caratteristiche, stabilito un lubrificante come termine di confronto (l'olio di colza, d'oliva, di spermaceti), riferendo le viscosità dei varii lubrificanti a questi tipi, applicando quanto si è detto nel capo V, si possono determinare i coefficienti d'attrito in un modo abbastanza soddisfacente.

Le ricerche sulle proprietà fisico-chimiche dei lubrificanti e quelle eseguite cogli apparecchi meccanici per la prova dei medesimi, compiono i risultati delle precedenti. Le ricerche sulle proprietà fisico-chimiche porgono il mezzo di assicurarci della bontà degli olii in relazione allo scopo a cui debbono servire, e gli apparecchi meccanici per la prova dei lubrificanti, confermando i risultati delle ricerche al viscosimetro, fanno conoscere come si comportano i lubrificanti rispetto alla pressione, alla velocità, alla specie dei metalli, all'estensione delle superficie, all'alterazione e ai riscaldi, permettendo di passare alla loro applicazione pratica senza compromettere la conservazione

e il buon andamento delle macchine impiegate nelle varie industrie. Così associando le diverse specie di prove, si può acquistare piena conoscenza dei lubrificanti e conseguentemente determinarne il valore industriale.

La formola di Petroff costituisce ancora una valida guida per giudicare dell'attrito e del modo di agire dei lubrificanti. Così crescendo l'attrito col crescere della velocità e scemando col diminuire della viscosità, essa c'insegna che nei casi di grandi velocità sarà conveniente l'uso di lubrificanti dotati di molta fluidità, congiunta però a quel grado di adesività per cui non abbiano a sfuggire dalle superficie d'attrito; mentre nei casi di piccola velocità si potrà far uso di lubrificanti dotati di minore fluidità. D'altra parte scemando l'attrito col crescere dello spessore dello strato lubrificante, converrà fare in modo che cotesto spessore sia il massimo possibile. Lo spessore dello strato lubrificante, come dimostra la formola di Petroff, ha una importanza grandissima; e si vede che ove esso sia in una misura conveniente, anche i lubrificanti scadenti possono dare buoni risultati. L'attrito esterno fra il lubrificante e le superficie, è pure da tenersi in considerazione, e quanto più piccolo esso sarà, accrescendosi il trinomio denominatore della formola di Petroff, l'attrito sarà minore.

La pressione è un altro elemento importantissimo. L'attrito non è indipendente da questa; ma in generale varia in ragione inversa dalla pressione specifica, e tenuto conto delle variazioni del trinomio denominatore della formola di Petroff, varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione medesima. Onde concentrare nella minor superficie possibile la pressione, in modo però che non abbia luogo rapido consumo del materiale, nè avvengano riscaldi, è giovevole nelle macchine: e se non fosse così non ci sapremmo spiegare come le macchine dotate di organi molto pesanti, assoggettate a forti pressioni, purchè costruite a dovere, consumino piccole quantità di lavoro per attrito, rispetto alle macchine minori. Scemando l'attrito col crescere della pressione specifica, la viscosità dei lubrificanti potrà essere regolata in relazione alla pressione; onde i lubrificanti più fluidi saranno convenienti per scemare l'attrito corrispondente alle piccole pressioni, mentre per le grandi

potranno essere sufficienti i più viscosi. Infine anche la temperatura dell'aria esterna esercita una influenza notevole sul coefficiente d'attrito, e la formola di Petroff ce ne dà la ragione; poichè col crescere della temperatura esterna scemando la viscosità del lubrificante, l'attrito necessariamente diminuisce. Di qui ci spieghiamo la scelta dei lubrificanti per l'inverno e per l'estate, e come minor lavoro consumino le macchine mantenute in ambienti caldi che freddi; giacchè una parte del calore impiegato al riscaldamento viene utilizzato a migliorare la lubrificazione.

Da tutte queste considerazioni emerge evidente la grande importanza della formola di Petroff, sia nella teoria come nella pratica. Conviene però aver presente che sono tali e tante le circostanze in cui si trovano le macchine, che sebbene questa formola provenga da un processo analitico razionale, interpreti con sufficiente approssimazione i risultati dei più chiari sperimentatori, e sia confermata dalle numerose esperienze di uno scienziato valentissimo e coscienzioso quale è il Petroff, tuttavia, trattandosi di un cardine fondamentale della scienza, ulteriori ricerche saranno certamente utili per confermare sotto tutti gli aspetti la formola medesima. Inoltre essa contiene elementi la cui mutua relazione non è ancora nota: così non sappiamo come variano la temperatura del lubrificante, la viscosità, l'attrito esterno, in relazione alla velocità, e alla conducibilità termica dei corpi circostanti alle parti lubrificate, nè conosciamo come varia lo spessore dello strato lubrificante in funzione della velocità, l'influenza che su di esso esercitano le deformazioni delle superficie d'attrito sotto l'azione delle forze esterne. La determinazione di tutti questi elementi costituisce la serie dei problemi che si presentano dinanzi a chi studia l'attrito, la soluzione dei quali porrà questa forza nel novero di quelle che si possono trattare con piena sicurezza di ottenere risultati attendibili, e apporterà certamente non lieve vantaggio al progresso della scienza e della pratica.

TABELLE



TABELLA I - *Esperienze di Morin.*

Attrito fra superficie piane in moto l' una sull' altra.

Indicazione della superficie in contatto	Disposizione delle fibre	Stato della superficie	Coefficiente d'attrito
Quercia su quercia . . .	parallele	senza lubrificante.	0,48
	»	spalmato di sapone secco.	0,16
	perpendicolari . . .	senza lubrificante.	0,34
	» . . .	bagnato d'acqua. .	0,25
	legno in testa su legno in piano .	senza lubrificante.	0,19
Olmo su quercia	parallele	» » .	0,43
	perpendicolari . . .		0,45
	parallele		0,25
Frassino, abete, faggio, pero selvatico e sorbo su quercia.	»	» » .	0,36 a 0,40 0,62
Ferro su quercia	»	bagnato d'acqua. .	0,26
		spalmato di sapone secco.	0,21
Ghisa su quercia	»	senza lubrificante.	0,49
Ottone su quercia. . . .	»	bagnato d'acqua. .	0,22
		spalmato di sapone secco.	0,19
		senza lubrificante.	0,62
Ferro su olmo.	»	» » .	0,25
Ghisa su olmo.	»	» » .	0,20
Cuoio nero conciato su quercia	»	» » .	0,27
Quercia e olmo su ghisa	»	» » .	0,38
Pero selvatico su ghisa.	»	» » .	0,44
Ferro su ferro.	»	» » .	» (1)
Ferro su ghisa e su bronzo	»	» » .	0,18
Ghisa su ghisa e su bronzo	»	» » .	0,15
Bronzo su bronzo . . .	»	» » .	0,20
Bronzo su ghisa. . . .	»	» » .	0,22
Bronzo su ferro	»	» » .	0,16
Quercia, olmo, carpino, pero selvatico, ghisa, ferro, acciaio, e bronzo striscianti l' uno sul-l' altro e su loro stessi	»	lubrificato nella maniera ordinaria .	0,07
		con sego	a 0,08
		grasso di maiale .	0,15
Pietre calcari oolitiche su calcari oolitiche	»	senza lubrificante.	0,64
Mattoni ordinarii su calcari oolitici	»	» » .	0,67

(1) Le superficie si aggruppano.

Tabella II - *Esperienze di Morin.*

Attrito dei perni mobili sui loro cuscinetti.

Indicazione delle superficie in contatto	Stato della superficie	Coefficiente d'attrito in modo ordinario	Coefficiente d'attrito in modo continuo
Perno in ghisa su cuscinetto in ghisa	lubrificate con olio d'uliva, grasso di maiale, sego, ecc.	0,07 a 0,08	0,054
	collo stesso lubrificante e bagnate d'acqua	0,08	»
	lubrificate d'asfalto	0,054	»
	untuose	0,14	»
	untuose e bagnate d'acqua	0,14	»
Perno in ghisa su cuscinetto in bronzo	olio d'uliva, grasso di maiale e sego	0,07 a 0,08	0,054
	untuose	0,16	»
	untuose e bagnate d'acqua	0,16	»
	poco untuose	0,19	»
	senza lubrificante	0,18	»
Perno in ghisa su cuscinetto in legno di guaiacco	olio e grasso di maiale	»	0,090
	untuose d'olio e di grasso di maiale	0,10	»
	untuose d'una miscela di grasso di maiale e piombaggine	0,14	»
Perno in ferro su cuscinetto in ghisa	olio d'uliva, sego e grasso di maiale	0,07 a 0,08	0,054
Perno in bronzo su cuscinetto in bronzo	olio d'uliva, grasso di maiale o sego	0,07 a 0,08	0,054
	grasso consistente	0,09	»
Perno in ferro su cuscinetto in guaiacco	olio e grasso di maiale	0,11	»
	untuose	0,19	»
Perno in ferro su cuscinetto in bronzo	olio	0,10	»
	untuose	0,09	»
Perno in bronzo su cuscinetto in ghisa	olio e sego	. . . .	0,045 a 0,052
Perno in guaiacco su cuscinetto in ghisa	grasso di maiale	0,12	»
	untuose	0,15	»
Perno in guaiacco su cuscinetto in guaiacco	grasso di maiale	»	0,07

TABELLA III - *Esperienze di Hirn.*

La parte inferiore della puleggia immersa nell' olio d' oliva.

Rapporti $\frac{P_1}{P}$	Temperatura dell' apparecchio T	92 giri al minuto velocità 1,108 metri per secondo			51 giri al minuto velocità 0,614 metri per secondo		
		Carico d' equilibrio in Chilog. P	Coefficiente d'attrito f	Rapporti dei diversi coefficienti al coefficiente a 60° C.	Carico d' equilibrio in Chilog. P_1	Coefficiente d' attrito	Rapporti dei diversi coefficienti al coefficiente a 60° C.
0,61	60	0,67	0,0646	1	0,41	0,0398	1
0,60	55	0,85	0,0817	1,264	0,51	0,0494	1,241
0,59	50	1,06	0,1015	1,571	0,625	0,0603	1,515
0,61	45	1,35	0,1285	1,989	0,82	0,0789	1,982
0,63	40	1,74	0,1644	2,545	1,10	0,1052	2,643
0,64	35	2,23	0,2088	3,232	1,49	0,1414	3,553
0,64	30	2,82	0,2610	4,040	1,80	0,1700	4,271
0,62	25	3,56	0,3250	5,031	2,15	0,2015	5,063

TABELLA IV - *Esperienze di Hirn.*

La parte inferiore della puleggia immersa nell' olio di spermaceti. 51 giri al minuto.

Temperatura dell' apparecchio T	Carico dell' equilibrio in Chilog.	Coefficiente d' attrito f	Rapporti dei diversi coefficienti al coefficiente a 60° C.
60	1	0,0185	0,19
55	1,259	0,0233	0,24
50	1,513	0,0280	0,29
45	2,043	0,0378	0,39
40	—	—	—
35	3,286	0,0608	0,64
30	—	—	—
25	5,686	0,1052	1,1

TABELLA V - *Esperienze di Hirn.*

La parte inferiore della puleggia immersa nell' olio d' oliva raffinato. 51 giri al minuto.

Temperatura dell' apparecchio *T*	Carico d' equilibrio in Chilog.	Coefficiente d' attrito *f*	Rapporti dei diversi coefficienti d' attrito al coefficiente a 60° C.
60	—	—	—
55	0,56	0,0541	1,250
50	0,70	0,0675	1,559
45	0,89	0,0855	1,975
40	1,15	0,1099	2,538
35	1,48	0,1406	3,247
30	1,87	0,1762	4,069
25	2,45	0,2284	5,275
20	3,00	0,2768	6.393

TABELLA VI - *Esperienze di Hirn.*

La puleggia lubrificata con spermaceti.92 giri al primo.

Temperatura dell' apparecchio *T*	Carico d' equilibrio in Chilog.	Coefficiente d' attrito *f*	Rapporti dei diversi coefficienti d' attrito al coefficiente a 60° C.
60	0,4	0,0388	1
55	0,7	0,0675	1,735
50	0,04	0,0996	2,567
45	1,34	0,1276	3,289
40	—	—	—
34,5	3,9	0,3538	9,118
29,6	4,85	0,4324	11,14
25,7	5,7	0,5083	13,10

Tabella VII - *Esperienze di Hirn.*

DENOMINAZIONE DELL' OLIO	Temperatura dell' apparecchio	Carico d'equilibrio per 90 giri al minuto P	Carico d'equilibrio per 50 giri al minuto P_1	Qualità relativa degli olii	Rapporti dei carichi $\frac{P_1}{P}$
Spermaceti Inglese . .	40	0,93	0,59	1	0,63
Spermaceti artificiale .	40	0,84	0,55	1,07	0,65
Olio d' oliva	40	1,60	1,02	0,58	0,63
Olio di piede di bue .	40	1,8	1,17	0,505	0,65
Olio di colza.	40	1,81	1,09	0,54	0,60
Olio di colza raffinato	40	2,05	1,31	0,45	0,64
Oleina	40	1,97	1,24	0,48	0,63
Olio d' oliva	40	1,85	1,18	0,50	0,64
Olio di balena.	40	1,46	0,92	0,64	0,63



TABELLA VIII - *Esperienze di Kirchweger.*

Olio di coesione, superficie di contatto, 6 pollici quadrati = 34,5 cmq., cuscinetto di una lega di piombo e antimonio, 180 giri al minuto, velocità 0,621 metri per secondo.

Carico totale in libbre	Pressione: libbre per pollice quadrato	Pressione: atmosfere	Coefficienti d' attrito: massimo	Coefficienti d' attrito: minimo	Coefficienti d' attrito: medio di due esperienze	Coefficienti d' attrito: medio di quattro esperienze
160	26,6	2,11	0,0253 0,0253	0,0253 0,0221	0,0253 0,0237	0,0245
260	43,3	3,42	0,0175 0,0175	0,0155 0,0155	0,0165 0,0168	0,0167
410	68,3	5,40	0,0173 0,0173	0,0161 0,0160	0,0165 0,0164	0,0165
510	85	6,71	0,0163 0,0144	0,0149 0,0139	0,0157 0,0141	0,0149
660	110	8,69	0,0122 0,0138	0,0115 0,0114	0,0120 0,0127	0,0124
760	126,7	10,01	0,0097 0,0117	0,0094 0,0113	0,0096 0,0114	0,0105
910	171,7	11,98	0,0095 0,0135	0.0095 0.0092	0,0092 0,0111	0,0105
1010	168,3	13,30	0,0100 0,0080	0,0085 0.0080	0,0092 0,0080	0,0086

TABELLA IX - *Esperienze di Kirchweger.*

Asse in ferro, diametro del perno 85 mm., lunghezza 134 mm., superficie di contatto 47,3 cmq., 180 giri, velocità 0,80 metri al secondo, cuscinetto in metallo bianco, lubrificante olio di colza.

		2070	4070	6070	8070
Carico totale in libbre . . .		2070	4070	6070	8070
Pressione	libbre p. pollice quadrato	259	509	759	1009
	atmosfere	20	40	58	77
Coefficienti d' attrito	massimo	0,0123	0,0100	0,0097	0,0112
	minimo	0,0084	0,0083	0,0069	0,0092
	medio	0,0107	0,0094	0,0079	0,0096

TABELLA X - *Esperienze di Kirchweger.*

Asse in ghisa, diametro del perno pollici $2\,^{3}/_{4}$, lunghezza $5\,^{1}/_{2}$, superficie $5\,^{3}/_{4}$ pollice quadrato = 33,1 centim. □, olio di colza, cuscinetto di una lega di piombo e antimonio, 180 giri al minuto, velocità 0,621 metri per secondo.

	Carico totale in libbre	2070	4070	6070	8070
Pressione	libbre per pollice quadrato	360	707,8	1055,7	1403,5
	atmosfere	28,6	55,8	83,4	110,9
Coefficiente d'attrito	massimo	0,0117	0,0124	0,0107	0,0096
	minimo	0,0081	0,0081	0,0077	0,0082
	medio	0,0099	0,0103	0,0092	0,0089

TABELLA XI - *Esperienze di Kirchweger.*

Olio di colza, superficie 34 centim. □, cuscinetto di una lega di piombo e antimonio, 360 giri al minuto, velocità 1,26 metri al secondo.

	Carico totale in libbre	4070	6070	8070
Pressione	libbre per pollice quadrato	707,8	1055,7	1403,5
	atmosfere	55,8	83,6	110,9
Coefficiente d'attrito	massimo	0,0098 0,0103	0,0101 0,0109	0,0104 0,0115
	minimo	0,0081 0,0085	0,0087 0,0084	0,0071 0,0087
	medio	0,0089 0,0091 0,0090	0,0094 0,0096 0,0095	0,0087 0,0101 0,0094

TABELLA XII - *Esperienze di Thurston.*

Perno nuovo d' acciaio, cuscinetto di bronzo, pressione e temperatura variabili, lubrificazione con spermaceti.

Velocità	30 piedi per minuto 0,152 metri per secondo					100 piedi per minuto 0,506 metri per secondo					250 piedi per minuto 1,287 metri per secondo		500 piedi per minuto 2,574 metri per secondo		1200 piedi per minuto 6,1 metri per secondo		
Pressione: libbre per pollice quadrato	200	150	100	50	4	200	150	100	50	4	200	100	200	100	200	150	100
Pressione: atmosfere	13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	6,8	13,6	6,8	13,6	10,2	6,8
Temperatura in C.																	
65,5	0,0500	0,0500	0,0250	0,0125	0,125	0,0140	0,0074	0,0025	0,0037	0,0630	0,0047	0,0028	0,0053	0,0037	0,0060	0,0058	0,0061
60,0	0,0250	0,0330	0,0110	0,0087	0,125	0,0100	0,0050	0,0025	0,0037	0,0630	0,0047	0,0030	0,0053	0,0037	0,0062	0,0058	0,0070
54,4	0,0160	0,0200	0,0044	0,0075	0,125	0,0087	0,0041	0,0019	0,0037	0,0630	0,0047	0,0030	0,0053	0,0037	0,0065	0,0062	0,0075
48,9	0,0110	0,0110	0,0044	0,0075	0,125	0,0056	0,0035	0,0019	0,0037	0,0630	0,0047	0,0037	0,0056	0,0037	0,0069	0,0067	0,0080
43,3	0,0100	0,0033	0,0037	0,0062	0,094	0,0044	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0050	0,0044	0,0062	0,0050	0,0075	0,0075	0,0087
37,8	0,0075	0,0028	0,0031	0,0056	0,094	0,0040	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0056	0,0045	0,0065	0,0061	0,0081	0,0083	0,0094
32,2	0,0056	0,0025	0,0031	0,0037	0,094	0,0040	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0070	0,0052	0,0075	0,0061	0,0100	0,0170	0,0150

TABELLA XIII - *Esperienze di Petroff.*

Coefficienti d'attrito interno μ di differenti liquidi espressi in milligrammi per mm. □

Temperatura in gradi C.	Olii organici				Acqua	Liquidi minerali estratti dalle nafte del Caucaso									
	Spermaceti a 19° C. d = 0,884 = 0,888	Oliva a 18° C. d = 0,9155 = 0,9166	Colza a 17° C. d = 0,9155 = 0,9145 = 0,9128	Ricino a 17° C. d = 0,9633		Cherosina a 23° C. d = 0,8215	Olio solare a 22° C. d = 0,8638	N.° 68 Oleoneide di Ragosina a 18° C. d = 0,885	N.° 69 Olio bruno a 20° C. d = 0,897	N.° 89 e 91 a 15° C. d = 0,896	N. 90 Residuo di nafta a 18° 4 C. d = 0,905	N.° 71 e 75 Olio trasparente a 18° 8 C. d = 0,905	N.° 70 Olio bruno a 18° 7 C. d = 0,906	N.° 74 e 94 Olio bruno a 18° 5 C. d = 0,900	N.° 98 Olio bruno a 18° C. d = 0,918	N.° 99 Miscela d'olio bruno e di vaselina a 18° C. d = 0,922
17,5	—	—	—	0,12300	0,0001095	0,000190	0,000722	—	0,00823	—	0,02075	0,02250	0,2280	0,03776	0,10940	0,41200
20	0,00360	0,00845	0,00937	9900	1030	181	647	0,00237	712	0,00825	1680	1845	1892	3034	8960	28500
22,5	326	752	837	8010	970	172	600	211	620	710	1418	1525	1602	2512	6820	19500
25	296	674	750	6720	916	164	559	187	543	617	1215	1280	1362	2212	5600	14100
27,5	270	604	673	5576	866	157	519	167	478	539	1045	1084	1169	1794	4590	11000
30	246	541	606	4636	821	150	483	152	422	473	901	928	1008	1530	3800	8960
32,5	226	488	548	3868	778	144	450	137	375	417	780	790	878	1310	3210	7330
35	208	440	495	3248	740	138	421	124	334	370	679	680	762	1126	2754	6070
37,5	191	398	449	2744	707	132	393	113	298	329	595	588	668	972	2394	5070
40	177	361	409	2331	667	127	369	102	267	294	525	510	589	844	2070	4240
42,5	164	332	374	1990	632	123	346	93	240	264	476	445	523	736	1800	3580
45	152	304	342	1715	612	119	327	85	217	238	415	392	463	646	1566	3040
47,5	142	280	315	1490	590	—	309	78	197	—	—	350	414	570	1364	2610
50	132	257	290	1306	569	—	291	69	180	—	—	314	372	504	1180	2250
52,5	124	237	268	1150	—	—	276	62	165	—	—	282	335	448	1010	1950
55	116	220	248	1018	—	—	262	56	152	—	—	253	302	—	—	1680
57,5	109	205	229	901	—	—	248	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60	102	190	214	777	—	—	235	—	—	—	—	—	—	—	—	—
62,5	96	177	200	704	—	—	224	—	—	—	—	—	—	—	—	—
65	91	165	187	623	—	—	213	—	—	—	—	—	—	—	—	—

d è la densità rispetto a quella dell' acqua distillata.

Tabella XIV - *Esperienze di Petroff.*

$\frac{C-C'_1}{C'_1}$	C'_1	Natura dell'olio	μ	U	f	C	C_1	$\frac{C-C_1}{C_1}$
0,00	0,00159	Olio di colza	0,00273	1882	0,0081	0,00158	0,00161	— 0,02
0,06		»	265	1854	82	168		0,04
0,04		»	362	1846	80	165		0,03
0,05		»	260	1846	80	167		0,04
0,03		»	259	1876	79	163		0,01
0,01		»	257	1921	79	161		0,00
0,03		»	416	1143	73	154		— 0,04
0,06		»	419	1135	71	149		— 0,08
0,03		»	641	623	65	163		0,01
0,05		»	627	613	64	167		0,04
0,06		»	629	630	67	169		0,05
0,01		»	627	604	61	161		0,00
0,00		»	631	623	62	158		— 0,02
0,00		»	631	608	61	159		— 0,01
0,02	0,00180	Olio minerale bruno N.° 60	307	1163	65	183		0,14
0,03		» »	310	1145	66	185		0,15
0,04		» »	311	1144	66	186		0,16
— 0,05		» »	311	1160	61	171		0,06
— 0,09		» »	322	1158	61	164		0,02
— 0,08		» »	309	1201	61	165		0,03
— 0,03		» »	517	579	52	174		0,08
— 0,02		» »	515	572	52	176		0,10
— 0,02		» »	507	589	53	177		0,10
0,06		» »	506	588	57	191		0,19
0,09		» »	513	589	59	196		0,22
0,07		» »	478	591	54	192		0,20
0,00	0,00151	Olio minerale trasp. N. 63	462	1124	78	151		— 0,06
0,00		» »	460	1135	77	151		— 0,06
— 0,02		» »	455	1125	76	148		— 0,08
— 0,02		» »	450	1126	75	148		— 0,08
— 0,04		» »	452	1114	72	144		— 0,11
— 0,06		» »	275	1817	69	141		— 0,12
— 0,06		» »	279	1812	71	141		— 0,12
0,03		» »	849	604	80	156		— 0,03
0,02		» »	833	623	80	154		— 0,04
0,07		» »	827	597	80	162		— 0,01
0,08		» »	811	630	83	163		0,01
0,01		» »	833	503	64	153		— 0,05
0,01		» »	811	511	63	152		— 0,06
0,03		» »	791	502	62	156		— 0,03
0,01		» »	833	441	56	153		— 0,05
— 0,04	0,00148	Olio minerale bruno N.° 62	909	815	93	141		— 0,12
— 0,02		» »	1550	420	94	145		— 0,10
— 0,04		» »	1539	417	91	142		— 0,12
0,00		» »	1580	364	85	147		— 0,09
0,01		» »	1621	359	87	149		— 0,07
0,00		» »	1631	362	87	147		— 0,09
0,06		» »	1453	444	101	157		— 0,03
0,08		» »	1463	432	100	159		— 0,01
		» »	1346	430	105	159		0,11

TABELLA XV - *Esperienze di Petroff.*

$\frac{C-C'_1}{C'_1}$	C'_1	NATURA DELL' OLIO	μ	U	f	C	C_1	$\frac{C-C_1}{C}$
0,05		Olio di colza	0,00442	1180	0,00678	0,00130		0,04
0,06		»	442	1180	685	131		0,05
—0,02	0,00124	»	297	2176	788	121		—0,03
—0,03		»	275	2150	708	120		—0,03
—0,03		»	275	2140	706	120		—0,03
0,00		Olio minerale bruno N. 69	210	2161	615	135		0,08
0,00		» »	207	2149	602	135		0,08
0,01		» »	206	2118	596	137		0,09
0,01		» »	207	2130	603	137		0,09
0,01	0,00136	» »	205	2130	594	137		0,09
—0,01		» »	203	2157	586	134		0,08
0,00		» »	201	2157	585	135		0,08
0,01		» »	200	2108	578	137		0,09
0,01		» »	202	2108	581	137		0,09
0,00	0,00138	Olio minerale bruno N. 67	395	1163	635	138		0,11
0,02		Olio minerale trasp. N. 62	486	1186	711	124		0,00
0,02		» »	483	1182	709	124		0,00
0,02		» »	475	1186	709	124		0,00
0,03		» »	475	1182	701	125		0,00
0,04		» »	481	1188	724	127		0,01
0,04		» »	489	1170	723	126		0,00
0,03		» »	491	1180	721	125		0,00
0,03		» »	486	1177	716	125		0,00
—0,03		» »	294	2042	704	118		—0,06
—0,05	0,00122	» »	291	2088	705	116		—0,07
—0,03		» »	284	2065	697	118		—0,06
—0,01		» »	281	2079	696	120		—0,04
—0,03		» »	279	2079	682	118		—0,06
—0,01		» »	279	2022	672	120	0,00125	—0,04
—0,01		» »	277	2024	668	120		—0,04
0,00		» »	463	1275	718	122		—0,02
—0,04		» »	451	1272	701	117		—0,06
0,00		» »	445	1272	694	122		—0,02
0,00		» »	440	1270	677	121		—0,03
0,00	0,00129	Olio minerale trasp. N. 70	536	1117	771	129		0,04
0,04		Olio minerale bruno N. 62	703	1175	1006	122		—0,02
0,02		» »	705	1186	1000	120		—0,04
0,02		» »	701	1187	1000	120		—0,04
0,02	0,00118	» »	698	1186	995	120		—0,04
—0,01		» »	481	1775	991	116		—0,07
—0,06		» »	504	1480	828	111		—0,11
—0,04		» »	504	1480	841	113		—0,09
0,02		Olio minerale trasp. N. 68	102	2067	359	170		0,36
0,01		» »	103	2062	356	168		0,35
0,01		» »	104	2033	357	169		0,36
0,02		» »	104	2040	361	170		0,36
0,02		» »	104	2033	359	171		0,37
—0,01	0,00167	» »	098	2290	355	165		0,32
—0,01		» »	107	2146	377	165		0,32
0,01		» »	106	2144	379	168		0,35
0,02		» »	106	2112	380	170		0,36
—0,08		» »	105	2070	350	161		0,29
—0,08		» »	103	2062	344	162		0,30
—0,01		» »	101	2011	334	265		0,32
0,64		» »	253	313	216	273		1,19
0,62		» »	255	313	215	270		1,16
0,64	0,00173	» »	254	305	212	274		1,20
0,64		» »	253	304	210	274		1,20

TABELLA XVI - *Esperienze di Petroff.*

NATURA DELL'OLIO	Pressione sullo strato lubrif. in atmosfere	Velocità in millimetri per secondo	Temperatura esterna in gradi C.	Coefficiente d'attrito	Rapporti fra i coefficienti d'attr. in ciascuna coppia d'esperienza determinati esperimentalmente n_1	graficamente n	$\frac{n_1 - n}{n}$	Differenza fra le temperat. esterne in gradi
Oolio di colza.......	62	411	15,5	0,0033	1	1		
»	—	403	5,4	0,0045	1,36	1,41	0,03	10°1
»	63	406	16.5	32	1	1		
»	—	410	7,3	47	1,47	1,38	—0,06	9°2
»	63	897	— 1,0	64	1	1		
»	—	892	— 9,5	77	1,20	1,19	0,01	8°5
»	74	515	0,5	45	1	1		
»	—	510	— 6,9	51	1,13	1,14	—0,01	7°4
»	75	515	0,5	56	1	1		
»	—	515	— 6,9	70	1,25	1,15	0,09	7°4
»	90	387	11,9	36	1	1		
»	—	421	3,9	43	1,19	1,21	—0,02	8°
Olio minerale bruno N. 67	63	403	16,0	40	1	1		
» »	—	418	11,8	47	1,17	1,19	—0,02	4°2
Olio minerale bruno N. 76	74	515	2,3	45	1	1		
» »	—	519	—10,6	66	1,47	1,67	—0,12	12°9
Olio minerale bruno N. 77	63	901	4,1	59	1	1		
» »	—	901	— 6,7	85	1,45	1,62	—0,10	10°8
» »	74	519	1,0	55	1	1		
» »	—	510	— 6,0	71	1,30	1,28	0,02	7°
» »	75	519	0,7	67	1	1		
» »	—	510	— 6,0	75	1,12	1,27	—0,12	6°7
Olio minerale bruno N. 95	90	421	15,1	35	1	1		
» »	—	417	7,7	41	1,18	1,37	—0,14	7°4
Olio minerale trasp. N. 71	16,5	404	9,8	105	1	1		
» »	—	411	5,0	127	1,21	1,31	—0,08	4°8
Olio minerale trasp. N. 75	62	406	13,1	062	1	1		
» »	—	417	5,0	071	1,15	1,37	—0,16	8°1
» »	90	416	13,4	045	1	1		
» »	—	417	5,1	056	1,24	1,39	—0,11	8°3
Olio minerale bruno N. 70	62	480	5,4	060	1	1		
» »	—	504	— 3,8	070	1,27	1,34	—0,05	9°2
» »	62	848	9,9	047	1	1		
» »	—	874	3,9	053	1,13	1,20	—0.06	6°
» »	63	480	5,7	084	1	1		
» »	—	504	— 4,0	110	1,31	1,32	—0,01	9°7
Olio minerale bruno N. 72	63	901	2,7	082	1	1		
» »	—	904	— 6,0	102	1,24	1,32	—0,06	8°7
Olio minerale bruno N. 74	43	916	18,2	061	1	1		
» »	—	919	10,4	075	1,23	1,21	—0,02	7°8
» »	64	412	23,2	046	1	1		
» »	—	410	15,5	057	1,24	1,38	—0,10	7°7
» »	62	920	25,8	058	1	1		
» »	—	913	10,6	086	1,48	1,54	—0,04	15°2
» »	62	410	23,3	046	1	1		
» »	—	408	3,4	100	2,18	2,28	—0,05	19°9
» »	62	920	26,0	56	1	1		
» »	—	888	16,0	70	1,25	1,36	—0,08	10°
» »	62	915	8,6	69	1	1		
» »	—	924	— 1,4	85	1,25	1,42	—0,12	10°
» »	63	888	3,8	46	1	1		
» »	—	884	— 3,7	56	1,22	1,43	—0,08	7°5

Seguito della Tabella XVI - *Esperienze di Petroff.*

Natura dell'olio	Pressione sullo strato lubrif. in atmosfere	Velocità in millimetri per secondo	Temperatura esterna in gradi C.	Coefficienti d'attrito	Rapporti fra i coefficienti d'attr. in ciascuna coppia d'esperienza determinati: esperimentalmente n_1	Rapporti fra i coefficienti d'attr. in ciascuna coppia d'esperienza determinati: graficamente n	$\frac{n_1 - n}{n}$	Differenza fra le temperat. esterne in gradi C.
Olio minerale bruno N. 74	63	915	8,2	54	1	1		
» »	—	924	— 1,5	70	1,30	1,24	0,05	9°7
» »	90	424	13,3	52	1	1		
» »	—	408	4 0	67	1,29	1,47	—0,12	9°3
» »	90	410	23,4	48	1	1		
» »	—	414	10,0	74	1,72	1,71	0,00	13°4
Olio minerale bruno N. 93	90	415	21,8	57	1	1		
» »	—	409	12,1	86	1,51	1,46	0,03	9°7
Residuo di nafta N. 90. .	62	504	9,8	56	1	1		
» » . .	—	510	2,3	76	1,35	1,31	0,03	7°5
» » . .	62	910	9,3	51	1	1		
» » . .	—	910	3,0	66	1,29	1,21	0,06	6°3
» » . .	63	504	9,6	52	1	1		
» » . .	—	510	2,2	62	1,19	1,26	—0,05	7°4
» » .	63	910	9,1	47	1	1		
» » . .	—	910	3,0	56	1,20	1,20	0,00	6°1

Tabella XVII - *Esperienze di Petroff.*

Natura dell'olio	μ a 20° C.	n	n_1 ottenuto per mezzo dell'osservaz. diretta	n_1 ottenuto per mezzo dell'equaz. (6)	Differenza fra il 1° e il 2° valore di n_1 diviso per quest'ultimo valore
Primo gruppo					
Olio di colza	0,00937	100	100		
Olio minerale bruno . . . N. 69	712	89	103	102	+ 1
Olio minerale bruno . . . N. 76	802	100	116	112	+ 4
Olio minerale bruno . . . N. 89 e 91. .	825	95	106	106	0
Olio minerale bruno . . . N. 77	839	105	112	116	— 4
Olio minerale bruno . . . N. 67	1090	106	114	113	+ 1
Residuo di nafta N. 90	1680	139	137	137	0
Olio minerale trasparente N. 73	1710	130	131	127	+ 3
Olio minerale trasparente N. 71 e 75. .	1845	148	137	143	+ 5
Olio minerale bruno . . . N. 70	1895	164	144	157	— 9
Olio minerale bruno . . . N. 72	2360	156	144	141	+ 2
Olio minerale bruno . . . N. 74	3034	183	167	162	+ 3
Olio minerale bruno . . . N. 93	8360	300	233	233	0
Miscela d'olio miner. bruno e di vasel. N. 99	28500	377	277	272	+ 2
Secondo gruppo					
Olio di colza	0,00937	100			
Oleoneide di Ragosina N. 68	237	38	47	50	— 6
Olio minerale bruno . . . N. 69.	712	83	89	94	— 5
Olio minerale bruno . . . N. 60.	837	90	96	100	— 4
Olio minerale bruno . . . N. 67.	1090	103	110	110	0
Olio minerale trasparente N. 63	1527	121	118	116	+ 2
Olio minerale bruno N. 62	2765	162	154	146	+ 6

TABELLA XVIII - *Esperienze di Petroff.*

NATURA DELL'OLIO	Somme delle pressioni sui cuscinetti (Kilog.)	Velocità media in millimetri	Temperatura in gradi C. dell'aria ambiente	Temperatura in gradi C. dello strato lubrificante determinata col-l'esper.	Temperatura in gradi C. dello strato lubrificante determinata col calcolo	$t - t_0$	$t' - t_0$	$\frac{t - t_0}{t' - t_0}$
	P	U	t_0	t	t'			
Olio di spermaceti.	500	800	20,2	33,0	32,0	12,8	11,8	1,08
Olio d'oliva	500	1018	20,2	46,2	44,7	26,0	24,5	1,06
»	500	1061	19,0	41,6	46,2	22,6	26,2	0,87
Olio di colza.	1000	999	20,0	50,5	51,2	30,5	31,2	0,98
Olio minerale bruno N. 36	1600	554	19,8	39,0	43,2	19,2	23,4	0,82
» »	2000	560	22,0	45,1	46,1	23,1	24,1	0,96
» »	1600	548	19,9	42,4	43,2	22,6	23,4	0,97
» »	2000	551	19,7	43,0	44,3	23.3	24,6	0,95
» »	1000	1021	16,5	57,8	54,3	41,3	38,3	1,08
» »	1000	1010	18,5	55,3	55,0	36,8	36,5	1.01
» »	1000	373	18,6	32,4	36,1	13,8	17,5	0,79
» »	1000	952	18,6	58,3	53,5	39,7	34,9	1,13
» »	1000	401	20,7	33,2	36,5	12,5	15,8	0,79
» »	1000	403	20,5	32,1	36,5	11,6	16,0	0,73
Olio minerale bruno N. 41	1000	391	15,3	31,9	35,6	16,6	20,3	0,82
» »	1000	1071	16.3	55,2	62,5	38,9	46,2	0,84
Olio minerale trasp. N. 40	1000	396	17,7	32,2	32,8	15,5	15,1	1,03
» »	2000	543	18,0	43,8	42,4	25,8	24,4	1,05
» »	1000	1078	16,0	53,9	54,6	37,9	38,6	1,00
Olio d'oliva	1000	1078	14,7	48,8	48,8	34,1	34,1	1,00
Olio di colza.	500	280	13,5	20,4	19,5	6,9	6,0	1,15
»	500	387	14,4	23,4	23,7	9,3	9,3	0,97
»	500	535	13,5	27,2	28,2	13,7	14,7	0,93
»	1600	1084	15,1	55,7	55,2	40,6	40,1	1,01
»	1600	1094	16,8	58,7	56,0	41,9	39,2	1,07
»	1000	781	14,4	42,3	40,8	27,9	26,4	1,05
Olio minerale trasp. N. 40	1000	548	18,6	36,3	34,8	17,1	16,2	1,09
» »	1600	1088	16,6	53,0	58,5	36,4	41,9	0,87
Olio di colza.	1000	1061	15,5	45,7	50,6	30,2	35,1	0,86
Olio minerale bruno N. 36	2000	285	18,7	33,4	32,0	15,7	14,3	1,10
» »	2000	564	18,5	43,8	44,2	25,3	25,7	0,98
» »	2000	1075	17,8	61,0	60,3	43,2	42,5	1,01
Olio di colza.	1000	1018	15,1	48,6	49,0	33,5	33,9	0,99
»	1000	774	15,6	37,7	40,8	22,1	25,2	0,88
»	500	543	15,8	29,8	29,6	13,6	13,8	0,99
Olio minerale bruno N. 36	1600	1069	15,5	57,1	59,3	51,6	43,8	0,95

Tabella XIX

Esperienze di depurazione, di densità e temperatura di alcuni olii lubrificanti eseguite alla S. per le S. F. Meridionali R. A. in Bologna.

Numero	Denominazioni degli olii	Depurazione: Acidità in $H^2 SO^4$ per 100 cc	Depurazione: tenore in goudr. %	Densità a 15 C.	Temperatura: di congelamento	Temperatura: d' inflammabilità	Indicazioni generali
1	V V.	neutro.	15	0,905	— 10°	280°	Bruno intenso. È un olio naturale raffinato.
2	S. A. (0 0) . .	neutro.	10	0,916	— 10°	270°	Bruno chiaro. È un olio naturale raffinato, contiene una piccola percentuale di mazout per dargli una colorazione scura.
3	F. S. S. . . .	legg.[e] alcalino	25	0,893	— 1°	310°	Bruno scuro con flurescenza verde. È un olio di miscela e contiene piccola quantità di sostanze grasse dopo saponificato.
4	F. C.	Id. . . .	10	0,902	— 7°	315°	Idem.
5	P. C. O. . . .	neutro.	10	0,910	— 10°	260°	Rosso bruno con flurescenza verde.
6	Olio minerale scuro. . . .	neutro.	20	0,910	— 17°	150°	Bruno scuro con flurescenza verde.
7	Olio d' oliva (Oneto). . .	0,88 . .	0	0,912	—	—	Verde oliva; a 130° incomincia a decomporsi. Esente da materie in deposito.
8	Miscela R. A.	neutro.	15	0,909	— 10°	150°	Bruno scuro con flurescenza verde. Fabbricato attualmente alla S. F. R. A. presso il deposito di Bologna (5 olio minerale scuro, 3 oliva, 1 sevo).

FRANCESCO MASI

ESPERIENZE D'ATTRITO

CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA



BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

FRANCESCO MASI

ESPERIENZE D'ATTRITO

CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA



BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

ESPERIENZE D'ATTRITO

Il serait vivement à désirer que M. Deprez voulût bien continuer ses belles expériences, en modifiant les charges, en tenant compte des températures, etc.

A. HIRN

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, février 1889.

Per verificare le principali leggi sull'attrito, quali derivano dalla formola di Petroff, e specialmente per vedere l'intima relazione esistente fra l'attrito interno dei lubrificanti e l'attrito totale o cinetico, ho fatto alcune esperienze, alla Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna, delle quali porgo i risultati nella presente nota.

In queste esperienze mi sono servito di due apparecchi: l'uno è il noto viscosimetro del Pagliani, col quale ho determinato i coefficienti d'attrito interno o di viscosità di diversi lubrificanti a varie temperature; l'altro è un apparecchio meccanico appositamente costruito, per determinare il coefficiente d'attrito totale. Questo apparecchio è rappresentato nella Tavola I, e consiste: di un albero d'acciaio A, mobile intorno al suo asse orizzontale, su cui è fissata la massa di ghisa M, di un altro albero B disposto sul prolungamento del primo, e di un innesto a frizione I, col quale, spostando la forchetta F, i due alberi A e B possono essere a volontà collegati o disgiunti. Essendo i due alberi collegati tra loro, la massa M riceve il movimento dalla puleggia P, la quale, per

mezzo di una cinghia, è messa direttamente in moto da un motore a petrolio: distaccando i due alberi, la massa si muove liberamente per la forza viva acquistata in precedenza, e compiendo un moto ritardato, in un tempo più o meno lungo, si restituisce al riposo. Misurando allora gli spazii angolari compiuti dalla massa e i tempi corrispondenti, si può determinare il coefficiente d'attrito nei perni dell'albero *A*.

In tal modo l' apparecchio permette di studiare la resistenza d' attrito a moto vario; ma lo stesso apparecchio può anche essere applicato per lo studio dell' attrito a moto uniforme; basta perciò mantenere disgiunti i due alberi *A* e *B*, e sul manicotto cavo dell' innesto, applicare una cinghia, la quale provenga da un dinamometro a rotazione intercalato fra il motore, od una trasmissione, e l'apparecchio: il lavoro misurato dal dinamometro darà il modo di determinare il coefficiente d' attrito. Collo stesso apparecchio si potrà pure studiare l' attrito a moto uniforme, specialmente per le grandi velocità, congiungendo direttamente l' albero *A* all' asse di un motore elettrico: dal numero di Volt e di Ampère misurati da appositi istrumenti di precisione, si calcolerà il lavoro d' attrito.

Spero col tempo di potere applicare e il dinamometro e il motore elettrico. Per ora mi sono limitato ad alcune ricerche sull' attrito a moto vario: ed ho creduto opportuno d' incominciare in questa maniera; primieramente per sviluppare l' idea del Deprez rimasta fino ad ora incolta, e da lui stesso applicata per una esperienza sola [1]; in secondo luogo perchè il celebre Hirn, che va certamente annoverato fra i più insigni esperimentatori dell' attrito, ha espresso su questo metodo favorevolmente il suo parere.

La massa *M* è costituita di quattro dischi di ghisa del diametro di 750 mm., i quali si possono successivamente togliere o fissare a volontà sull' albero dell' apparecchio mediante apposite biette; questi dischi sono stati così calcolati che con uno solo, la pressione risultasse di un chilogramma sul centimetro

---

[1] Comptes Rendus n.º 20, 17 Nov. 1884.

quadrato, con due di due chilogrammi, con tre e quattro dischi di tre e quattro chilogrammi per centimetro quadrato. Mediante opportune modificazioni, non difficili ad essere introdotte, si potranno eseguire collo stesso apparecchio esperienze a pressioni notevolmente maggiori: basterà perciò applicare ai cappelli dei supporti due molle dinamometriche colle quali esercitare e misurare la pressione voluta.

L' albero *A* dalla parte interna ai supporti, è munito di due colletti a sguscio, le cui basi sono discoste dai cuscinetti di un millimetro e mezzo per parte, affine di lasciare il giuoco sufficiente perchè i perni non aderiscano ai supporti. I cuscinetti sono guerniti di metallo bianco più comunemente applicato nelle macchine; e i loro piani di separazione si toccano, cosicchè la pressione è tutta dovuta al peso della massa rotante. Il diametro dei perni è di 70 mm. e la lunghezza dei cuscinetti è di 200 mm. Per fare equilibrio al manicotto *I*, alla parte opposta dell' albero *A*, è collocato il contrappeso *C*, calcolato e disposto in modo che le reazioni passino nel mezzo dei due cuscinetti [1]. La distribuzione dell' olio è fatta in due punti per ogni supporto, mediante oliatori, sistema Henry, a contagoccie visibili e regolabili. La temperatura è stata presa in tre punti di ciascun supporto, disponendo termometri a mezzo grado, entro apposite cavità contenenti olio d' oliva, come è indicato in disegno. I fondi di queste cavità distano dalle superficie interne dei cuscinetti di un millimetro; cosicchè può ritenersi che i termometri diano con piccolissima differenza la temperatura dello strato lubrificante. Tutto l'apparecchio riposa sopra una robusta fondazione in muratura, ed è stato costruito dalla ditta A. Calzoni di Bologna.

Ai dischi venne comunicata una velocità di rotazione variabile da 500 a 600 giri al minuto primo; e per registrare i giri da essi compiuti nel restituirsi al riposo, con una certa

---

[1] Per mettere nella giusta posizione il contrappeso, si adagiò l'albero, munito di due dischi, del manicotto *I* e del contrappeso *C*, sopra due coltelli ricoperti in lastra di rame, rispettivamente posti sopra due *bascules*; quando queste segnarono egual peso, si fissò il contrappeso.

FRANCESCO MASI

ESPERIENZE D'ATTRITO

CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA



BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

FRANCESCO MASI

ESPERIENZE D'ATTRITO

CON UNA TAVOLA LITOGRAFICA



BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1897

Tabella A

Denominazione degli olii	Acidità KOH N/10 cc per 10 cc d'olio	Densità a 15° C	Temperatura d'inflammabilità	Temperatura di congelamento	Indicazioni generali
Olio minerale per motori a gas. . .	1	0,905	245°	0°	Color verde con fluorescenza rossa. Alla prova di Lux risultò puro.
Miscela R. A.	neutro	0,909	150°	— 10°	Color bruno con fluorescenza verde. Fabbricata dalla S. F. R. A. presso il deposito di Bologna (5 d'olio minerale scuro, 3 d'oliva, 1 sevo).
Olio minerale scuro . . .	neutro	0,910	150°	— 17°	Bruno scuro con fluorescenza verde.

Servendomi del viscosimetro Pagliani, appartenente alla Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna, ho determinato le viscosità a varie temperature dei tre olii nominati, ed i risultati ottenuti sono consegnati nella seguente tabella.

Tabella B

Coefficienti di viscosità degli olii esperimentati, espressi in grammi per cent. □

Temperatura in C	Olio minerale per motori a gas	Miscela R. A.	Olio minerale scuro
20°	0, 002215	0, 002280	0, 005549
25°	0, 001605	0, 001699	0, 003884
30°	0, 001235	0, 001280	0, 002741
33°	0, 001028	0, 001130	0, 002312
35°	0, 000891	0, 001012	0, 002026
37°	0, 000806	0, 000951	0, 001790
40°	0, 000678	0, 000759	0, 001490

Un punto molto importante riguarda la distribuzione del lubrificante; nello studio della quale si apre un vasto campo d'investigazione, particolarmente rispetto all'influenza dello spessore dello strato lubrificante sul coefficiente d'attrito. Riserbandomi di studiare cotesta questione in seguito, per ora mi sono limitato ad una lubrificazione abbondante, ed in tutte le esperienze, ho distribuito gli olii nella quantità costante di 30 goccie al minuto primo, pari ad un grammo per supporto [1].

Le temperature alle quali sono stati esperimentati i tre olii furono di 30° 33° 37° e 40°; per ottenere le quali avrei potuto scaldare colla lampada i supporti; ma ho preferito di raggiungerle naturalmente, per effetto del solo attrito, variando la velocità e il tempo nel quale l'apparecchio era mantenuto in moto uniforme prima del distacco. Ho preferito questo secondo modo per due ragioni: primieramente per riconoscere la temperatura di regime dei diversi olii, cioè la massima a cui essi salgono per effetto della sola velocità (senza cause di riscaldi), temperatura che si riconosce facilmente quando mantenendo la velocità costante essa pure rimane costante; nel qual caso tanto calore si genera per attrito, quanto ne viene disperso per conducibilità dai supporti e dall'aria: in secondo luogo perchè se durante il moto uniforme prima del distacco, o durante il moto vario, avveniva qualche anomalìa, questa era accusata immediatamente dai termometri.

Nella serie di esperienze eseguite ho potuto constatare col fatto, che un buon termometro è un prezioso indicatore dell'attrito. Così è risultato che quegli olii che hanno attrito minore, a parità di altre circostanze, e di temperatura esterna, hanno anche una temperatura di regime minore; ed è stato confermato che la temperatura dell'aria esterna ha una grande influenza sull'attrito. Esperimentando coll'olio minerale per motori a gas, e coll'olio minerale scuro, pressochè alla stessa

---

[1] Questa lubrificazione è certamente abbondante, se si pensa che, in molte trasmissioni, l'olio viene distribuito in ragione di un grammo per supporto al giorno, e in talune si va persino a sole 34 goccie per supporto alla settimana (THURSTON, *Friction and Lubrication*).

velocità (500 a 550 giri) e alla stessa temperatura esterna (22° a 25°), si è trovato che il primo presenta un attrito notevolmente minore dell' altro, ed ha una temperatura di regime poco superiore ai 33°, mentre quella dell' olio minerale scuro sale oltre i 40°. Esperimentando colla miscela *R, A,* ad una temperatura esterna superiore alla precedente (27° a 29°), si è trovato che, mentre alla stessa velocità essa presenta un attrito non molto superiore a quello dell' olio minerale per motori, la sua temperatura di regime sale oltre 37°. Ciò spiega ancora come i coefficienti d' attrito, consegnati nelle annesse tabelle, sieno stati determinati a temperature massime diverse e cioè: per l' olio minerale per motori alla temperatura di 33°, per la miscela a 37°, e per l' olio minerale scuro a 40°. Sostituendo agli attuali supporti, altri a circolazione d' acqua, od applicando ad essi speciali apparecchi riscaldatori, si potranno eseguire esperienze a temperature molto elevate.

Una osservazione deve farsi rispetto al modo con cui varia la temperatura in ogni esperienza. Effettuato il distacco, i termometri salgono tutti di qualche poco, e raggiungono una temperatura massima con una legge che varia a seconda della durata della esperienza. Se l' esperienza a moto vario è di breve durata, come quella ad un solo disco, la temperatura massima avviene quando la massa sta per fermarsi, o dopochè si è restituita al riposo. Se l' esperienza è molto lunga come quella a quattro dischi, la temperatura massima si verifica circa a mezzo della esperienza, rimane costante per quasi tutto il resto della medesima, e solamente verso la fine incomincia a scemare di qualche poco. Inoltre l' aumento di temperatura che si manifesta dopo il distacco è tanto più grande, quanto maggiore è la differenza fra la temperatura alla quale si eseguisce l' esperienza a moto vario e quella di regime; e quando si distacca a questa temperatura, o ad una molto vicina, non si verifica aumento, o questo è piccolissimo. Dobbiamo però notare che nei casi di maggior divario, le variazioni di temperatura dopo il distacco non sono mai molto forti, uno o due gradi al massimo; onde con sufficiente approssimazione, può ritenersi che la massa si restituisca al riposo ad una tempe-

ratura costante. Per stabilire questa temperatura, si è proceduto nel modo seguente: dalla massima segnata dai termometri, si è sottratta la semidifferenza fra la stessa temperatura massima e la minima verificatasi durante ciascuna esperienza; il risultato venne assunto a rappresentare la temperatura costante sotto cui la massa si restituiva al riposo. Con qualche prova preliminare, si arrivava facilmente alla temperatura voluta. Dobbiamo ancora notare che i termometri non segnavano esattamente sempre la stessa temperatura; però le differenze erano molto piccole: onde come temperatura costante della esperienza, è stata presa la media di quelle desunte da tutti i termometri.

Avanti d' incominciare definitivamente le esperienze si sono avute molte avvertenze e precauzioni. Innanzi tutto con varie prove si è ridotto perfettamente orizzontale l' asse di rotazione dell' apparecchio, poi si è procurato che le superficie dei perni e dei cuscinetti si adattassero perfettamente, facendo camminare l' albero per oltre quindici giorni, da prima con uno, poi con due, tre e quattro dischi, ed esplorando continuamente la temperatura. Quando questa saliva troppo rapidamente, o molto diversamente nei vari termometri, si smontava l' apparecchio, si pulivano le superficie, si lisciavano con finissima carta smerigliata, e si lavavano con petrolio. Così procedendo si arrivò al punto in cui le superficie erano perfettamente aggiustate, e i termometri segnavano, con differenze minime, la stessa temperatura alla velocità massima di 600 giri al minuto primo. Per un' altra settimana dopo si sono fatte esperienze preliminari, affine di studiare l' apparecchio, e porre in pratica il detto di Hirn: *pour s' en servir convenablement, il faut avoir acquis, s' il m' est permis de m' exprimer ainsi, une grande habitude de l' instrument, en connaître tous les caprices, toutes le difficultés de maniement* (1). Incominciate le esperienze, non si è mai tralasciato di osservare i termometri; si scartarono quelle nelle quali si ebbero

---

(1) HIRN - *Études sur les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats etc.* « Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse », 1855, pag. 221.

anche leggeri riscaldi, prodotti forse da qualche sostanza estranea nell' olio; e finita ogni esperienza, prima di passare ad altra, si ebbe sempre cura di pulire le superficie, lisciarle, se occorreva, con finissima carta smerigliata, e lavarle con petrolio. Con tali precauzioni ed avvertenze sono state eseguite tutte le esperienze, e vennero determinati i coefficienti d' attrito alle varie temperature e pressioni, quali sono raccolti nelle annesse tabelle I, II e III.

Confrontiamo ora i risultati delle nostre esperienze colla formola di Petroff.

Indicando con:

f il coefficiente d' attrito totale o cinetico,

μ la viscosità o il coefficiente d' attrito interno del lubrificante,

v la velocità lineare del perno,

λ e λ_1 i coefficienti d' attrito esterno, cioè del lubrificante colla superficie del perno, e del lubrificante colla superficie del cuscinetto,

ε lo spessore dello strato lubrificante,

p la pressione specifica, ossia sulla unità di superficie; la formola di Petroff è:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f = \frac{\mu v}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}.$$

Dalle esperienze di Petroff risulta poi che il trinomio:

$$\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$$

è inversamente proporzionale alla radice quadrata della pressione specifica, perciò detto k un coefficiente di proporzionalità è:

$$\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1} = \frac{k}{\sqrt{p}}$$

e per conseguenza la (1) diviene:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f = \frac{\mu v}{k \sqrt{p}}.$$

Le formule (3) e (4) racchiudono le seguenti leggi.

A parità delle altre circostanze:

1.° *Il coefficiente d'attrito totale o cinetico è direttamente proporzionale alla viscosità o all'attrito interno dei lubrificanti;* e siccome questo scema col crescere della temperatura, così *anche il coefficiente d'attrito totale*, a parità delle altre circostanze, *diminuisce col crescere della temperatura.*

2.° *È direttamente proporzionale alla velocità lineare del perno.*

3.° *Scema col crescere dello spessore dello strato lubrificante.*

4.° *Cresce col crescere dell'attrito esterno, ossia del lubrificante colle superficie.*

5.° *Varia in ragione inversa della pressione specifica; e tenuto conto delle variazioni del trinomio denominatore dipendenti dalla pressione, varia in ragione inversa della radice quadrata della pressione specifica.*

Incominciamo da uno sguardo generale alla tabella B, pag. 10, e alle tabelle I, II e III. Dalla tabella B, appare chiaramente che le viscosità dei tre lubrificanti diminuiscono col crescere della temperatura: dalle tabelle I, II, III si vede abbastanza bene verificata la stessa legge anche pei coefficienti d'attrito totale f, i quali, per tutti e tre gli olii esperimentati, e per tutte quattro le pressioni specifiche p, a velocità v pressochè eguali, vanno diminuendo col crescere della temperatura. La tabella B indica che dei tre olii il meno viscoso è l'olio minerale per motori a gas, poi viene la miscela $R A$, indi l'olio minerale scuro. Esaminando le tabelle I, II e III, si vede che, a pari temperatura e pressione, e velocità pressochè eguali, quegli olii i quali hanno viscosità minore, hanno anche il coefficiente d'attrito totale minore: così seguendo lo stesso ordine delle viscosità, il lubrificante che ha attrito totale minore è l'olio minerale per motori a gas, poi viene la miscela, ed infine l'olio minerale scuro. Adunque resta confermata, in modo molto evidente, la perfetta correlazione fra l'attrito totale e la viscosità o l'attrito interno dei lubrificanti.

Nelle tabelle I, II e III, osservando l'ordine con cui si seguono i valori di v e di f, si vede chiaramente che

il coefficiente d' attrito varia al variare della velocità, e precisamente diminuisce col diminuire di questa, per tutti e tre gli olii esperimentati.

Infine se si confrontano i valori dei coefficienti d' attrito alle diverse pressioni specifiche, risulta pure manifesto che, corrispondentemente a velocità pressochè eguali, i coefficienti d' attrito vanno diminuendo col crescere della pressione specifica.

Adunque da questo primo sguardo derivano le seguenti leggi generali:

1.° *Il coefficiente d' attrito totale è in perfetta correlazione colla viscosità dei lubrificanti; e cresce o diminuisce col crescere o diminuire di essa.*

2.° *Il coefficiente d'attrito cresce col crescere della velocità.*

3.° *Il coefficiente d' attrito diminuisce col crescere della pressione specifica.*

Le quali leggi sono in perfetta armonia con quelle che derivano dalla formola di Petroff.

Passiamo ora a considerare più intimamente i rapporti secondo cui il coefficiente d' attrito varia al variare degli elementi contenuti nella formola di Petroff. A tale scopo nelle tabelle I, II e III sono notati i valori di $\frac{\mu v}{f}$ e di $f\sqrt{p}$ calcolati secondo i dati ottenuti nelle nostre esperienze.

Esaminando in tutte e tre le tabelle il termine $\frac{\mu v}{f}$, si vede che, a temperatura costante, esso realmente varia al variare della velocità; però se si considerano le velocità a determinati intervalli, appare che lo stesso termine, fino ad un certo limite, rimane prossimamente costante, od oscilla intorno ad un valore medio. Ciò indica che entro determinati intervalli di velocità, e fino ad un certo limite, a temperatura costante, cioè per μ costante, il coefficiente d' attrito f è, con una certa approssimazione, direttamente proporzionale alla velocità. Passato il limite nel quale si verifica questa proporzionalità, il termine $\frac{\mu v}{f}$ diminuisce colla velocità. Ciò indica che il coefficiente d' attrito scema in una ragione

minore della velocità stessa: e ciò è naturale, poichè se il coefficiente d'attrito, per tutto il tempo nel quale la massa rotante si restituisce al riposo, si mantenesse proporzionale alla velocità, questa non potendo essere annientata da una resistenza ad essa proporzionale, la massa non dovrebbe fermarsi.

Resta adunque confermata la proporzionalità fra il coefficiente d'attrito totale e la velocità, come è indicato nella seconda legge di Petroff. Quanto alle variazioni del coefficiente d'attrito in una ragione minore della velocità, esse sono in armonia colla terza legge di Petroff; poichè il coefficiente d'attrito non solo diminuisce colla velocità; ma, come è indicato nella stessa legge, cresce col diminuire dello spessore dello strato lubrificante, il quale alla sua volta, giusta quanto Petroff dedusse dalle esperienze di Hirn, diminuisce colla velocità, in una misura da moderare le variazioni del coefficiente d'attrito dovute alla velocità stessa.

Consideriamo ora il termine $\frac{\mu v}{f}$, supponendo che la velocità e la pressione siano costanti e varino la temperatura e la specie del lubrificante. In tal caso in tutte e tre le tabelle si vede che per ciascuna pressione, alle stesse velocità, il termine $\frac{\mu v}{f}$ è variabile. Però se si considera un medesimo lubrificante alle medesime velocità e pressioni, e a temperature non molto diverse, lo stesso termine con sufficiente approssimazione può ritenersi costante. Onde per uno stesso lubrificante a velocità e pressione costanti, e a temperature non molto diverse, il coefficiente d'attrito è proporzionale alla viscosità; il che è conforme alla prima legge di Petroff.

Variando la natura dei lubrificanti, a velocità e pressione costanti, il termine $\frac{\mu v}{f}$ presenta differenze molto più grandi. Ciò è pure in armonia colle esperienze di Petroff, il quale per causa di coteste differenze, riscontrò che i valori esperimentali dei coefficienti d'attrito possono differire da quelli calcolati graficamente, persino del 25 %. Onde distinse gli olii in due gruppi, a seconda che le loro caratteristiche si avvicinano o

si allontanano da quella dell' olio di colza. Per gli olii del primo gruppo trovò che i coefficienti d'attrito calcolati graficamente corrispondono a quelli determinati esperimentalmente, mentre per quelli del secondo la differenza essendo troppo forte, stabilì un' apposita formola empirica di correzione.

Le esperienze di Petroff sono numerose; onde la detta formola può ricevere una estesa applicazione per determinare la relazione fra l' attrito totale e la viscosità. In generale però a pressione e velocità costante, tale relazione sarà espressa da:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{\varepsilon_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda'_1}}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}}$$

e trascurando μ e μ_1 a fronte di λ e λ, da:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

Dalle quali si vede che, in generale per avere idea del coefficiente d' attrito nei lubrificanti, le prove al viscosimetro sono certamente di grande importanza, ma da sole non bastano: esse debbono essere accompagnate da altre relative all' attrito esterno e allo spessore dei lubrificanti: nel che si apre un nuovo orizzonte nello studio dell' attrito.

Passiamo finalmente alla legge delle pressioni. Per due lubrificanti diversi, considerati nelle condizioni più generali, dalla formola di Petroff espressa sotto la forma (4), si ha:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{v}{v_1} \frac{k_1}{k} \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}}$$

Per uno stesso lubrificante alle stesse velocità e temperature, sarà:

$$v = v_1 \,;\; \mu = \mu_1 ;\; k = k_1$$

e quindi:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}}$$

ossia:

$$f\sqrt{p} = f_1\sqrt{p_1} = \text{costante}.$$

Ora esaminando le tabelle I, II e III, si vede che a pari velocità e temperatura, per ciascun olio e per tutte le quattro pressioni, i valori di $f\sqrt{p}$ in esse notati realmente variano; in complesso però le variazioni non sono molto forti: onde con una certa approssimazione, in questo caso, la legge delle pressioni può ritenersi confermata.

In questa prima serie di esperienze mi sono limitato ad una lubrificazione abbondante, a velocità inferiori a m. 2, a pressioni specifiche non maggiori di 4 Cg., a tre soli lubrificanti, a basse temperature, e ad una sola specie di superficie d' attrito. Molto rimane a fare; e variando le condizioni delle esperienze si apre un nuovo e fecondo campo d' investigazioni, che in avvenire spero di poter coltivare. Intanto sento il dovere di ringraziare il sig. comm. J. Benetti direttore della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna, il quale nulla ha tralasciato, perchè nel corrente anno potessi eseguire coteste esperienze; e così nella scuola stessa, a fianco degli studi esperimentali sulla resistenza dei materiali, si iniziassero anche quelli sull' attrito e sui lubrificanti.



Tabella I

Esperienze d'attrito - *Olio minerale per motori a gas*

Press. p in Cg. per cm.□	Temperatura 30° Viscosità μ = 0,001235				Temperatura 33° Viscosità μ = 0,001028			
	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$
1	1,566	0,0245	0,0786	0,0245	1,610	0,0229	0,0719	0,0229
	1,267	0,0208	0,0749	0,0208	1,408	0,0197	0,0734	0,0197
	1,003	0,0173	0,0713	0,0173	1,078	0,0156	0,0710	0,0156
	0,783	0,0142	0,0678	0,0142	0,880	0,0138	0,0644	0,0138
	0,602	0,0111	0,0667	0,0111	0,704	0,0114	0,0634	0,0114
	0,462	0,0104	0,0557	0,0104	0,558	0,0093	0,0613	0,0093
	0,330	0,0079	0,0508	0,0079	0,440	0,0080	0,0562	0,0083
	0,228	0,0058	0,0477	0,0058	0,325	0,0069	0,0484	0,0069
	—	—	—	—	0,237	0,0055	0,0443	0,0055
	—	—	—	—	0,135	0,0046	0,0294	0,0046
2	1,562	0,0162	0,1185	0,0229	1,544	0,0153	0,1037	0,0216
	1,364	0,0153	0,1096	0,0217	1,375	0,0135	0,1058	0,0190
	1,177	0,0139	0,1031	0,0196	1,210	0,0128	0,0971	0,0181
	1,006	0,0130	0,0954	0,0183	1,051	0,0108	0,1000	0,0152
	0,847	0,0103	0,1022	0,0145	0,919	0,0099	0,0954	0,0140
	0,720	0,0103	0,0859	0,0145	0,807	0,0094	0,0883	0,0132
	0,594	0,0083	0,0874	0,0117	0,677	0,0083	0,0828	0,0117
	0,495	0,0083	0,0729	0,0117	0,576	0,0081	0,0731	0,0114
	0,393	0,0074	0,0649	0,0104	0,477	0,0076	0,0681	0,0107
	0,302	0,0065	0,0569	0,0091	0,385	0,0072	0,0549	0,0101
	0,222	0,0065	0,0417	0,0091	0,297	0,0060	0,0492	0,0084
	—	—	—	—	0,222	0,0060	0,0361	0,0084
3	1,694	0,0153	0,1361	0,0265	1,729	0,0134	0,1326	0,0232
	1,402	0,0136	0,1267	0,0235	1,447	0,0114	0,1304	0,0197
	1,143	0,0123	0,1142	0,0213	1,207	0,0111	0,1117	0,0192
	0,909	0,0097	0,1152	0,0168	0,973	0,0097	0,1031	0,0168
	0,724	0,0085	0,1047	0,0147	0,769	0,0077	0,1026	0,0133
	0,562	0,0073	0,0946	0,0126	0,607	0,0069	0,0904	0,0119
	0,422	0,0066	0,0787	0,0114	0,462	0,0062	0,0764	0,0107
	0,295	0,0053	0,0684	0,0091	0,331	0,0050	0,0680	0,0086
	—	—	—	—	0.224	0,0043	0,0535	0,0074
4 (1)	1,878	0,0106	0,2189	0,0183	1,752	0,0099	0,1820	0,0171
	1,566	0,0102	0,1896	0,0176	1,460	0,0092	0,1631	0,0159
	1,265	0,0083	0,1882	0,0143	1,188	0,0076	0,1606	0,0131
	1,018	0,0077	0,1771	0,0122	0,962	0,0067	0,1476	0,0116
	0,807	0,0067	0,1488	0,0116	0,762	0,0063	0,1244	0,0109
	0,607	0,0055	0,1363	0,0095	0,576	0,0051	0,1161	0,0088
	0,442	0,0052	0,1050	0,0090	0,425	0,0049	0,0887	0,0084
	0,290	0,0050	0,0723	0,0086	—	—	—	—

(1) In queste esperienze si fece uso d'olio della stessa qualità, ma di un lattone diverso.

Tabella II

Esperienze d'attrito - *Miscela R. A.*

Press. p in Cg. per cm.□	Temperatura 30° Viscosità $\mu = 0{,}001280$				Temperatura 33° Viscosità $\mu = 0{,}00113$				Temperatura 37° Viscosità $\mu = 0{,}000951$			
	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$
1	1,709	0,0348	0,0628	0,0348	1,735	0,0320	0,0613	0,0320	1,874	0,0301	0,0592	0,0301
	1,267	0,0262	0,0629	0,0262	1,329	0,0244	0,0615	0,0229	1,491	0,0234	0,0606	0,0234
	0,933	0,0189	0,0632	0,0189	1,039	0,0187	0,0628	0,0187	1,194	0,0197	0,0576	0,0197
	0,693	0,0163	0,0543	0,0163	0,801	0,0158	0,0573	0,0158	0,943	0,0156	0,0575	0,0156
	0,485	0,0117	0,0530	0,0117	0,600	0,0122	0,0556	0,0122	0,745	0,0135	0,0525	0,0135
	0,336	0,0096	0,0448	0,0096	0,445	0,0104	0,0484	0,0104	0,574	0,0114	0,0478	0,0114
	0,214	0,0070	0,0392	0,0070	0,313	0,0085	0,0416	0,0085	0,429	0,0088	0,0463	0,0088
	0,125	0,0057	0,0281	0,0050	0,204	0,0062	0,0402	0,0062	0,316	0,0078	0,0382	0,0078
	—	—	—	—	—	—	—	—	0,217	0,0059	0,0366	0,0059
	—	—	—	—	—	—	—	—	0,141	0,0057	0,0236	0,0057
2	1,507	0,0194	0,0994	0,0274	1,573	0,0190	0,0935	0,0268	1,502	0,0183	0,0781	0,0258
	1,270	0,0159	0,1021	0,0224	1,262	0,0148	0,0963	0,0209	1,190	0,0145	0,0780	0,0205
	1,064	0,0142	0,0959	0,0200	1,080	0,0139	0,0878	0,0196	0,982	0,0111	0,0841	0,0156
	0,891	0,0112	0,1018	0,0158	0,910	0,0119	0,0864	0,0168	0,825	0,0109	0,0720	0,0154
	0,753	0,0110	0,0876	0,0155	0,764	0,0112	0,0778	0,0158	0,669	0,0084	0,0757	0,0118
	0,618	0,0106	0,0746	0,0149	0,627	0,0097	0,0730	0,0137	0,549	0,0082	0,0736	0,0115
	0,489	0,0087	0,0720	0,0123	0,508	0,0083	0,0692	0,0117	0,431	0,0074	0,0554	0,0104
	0,383	0,0072	0,0680	0,0101	0,403	0,0072	0,0632	0,0101	0,325	0,0062	0,0498	0,0087
	0,294	0,0069	0,0545	0,0097	0,319	0,0069	0,0522	0,0097	0,235	0,0054	0,0414	0,0076
	0,209	0,0056	0,0477	0,0079	0,233	0,0058	0,0455	0,0082	0,157	0,0046	0,0326	0,0065
	—	—	—	—	0,162	0,0054	0,0329	0,0076	—	—	—	—
3	1,515	0,0175	0,1100	0,0303	1,520	0,0155	0,1108	0,0268	1,629	0,0146	0,1061	0,0252
	1,282	0,0153	0,1072	0,0265	1,282	0,0125	0,1159	0,0216	1,378	0,0123	0,1065	0,0213
	1,077	0,0109	0,1264	0,0188	1,114	0,0116	0,1085	0,0200	1,167	0,0122	0,0910	0,0211
	0,931	0,0104	0,1145	0,0180	0,959	0,0109	0,0994	0,0188	0,958	0,0103	0,0885	0,0178
	0,792	0,0102	0,0993	0,0176	0,812	0,0099	0,0927	0,0171	0,781	0,0088	0,0844	0,0152
	0,655	0,0092	0,0911	0,0159	0,681	0,0097	0,0793	0,0168	0,628	0,0080	0,0747	0,0138
	0,627	0,0088	0,0912	0,0152	0,551	0,0081	0,0769	0,0140	0,491	0,0072	0,0648	0,0124
	0,414	0,0072	0,0738	0,0124	0,443	0,0074	0,0666	0,0128	0,366	0,0056	0,0622	0,0096
	0,318	0,0062	0,0656	0,0107	0,344	0,0056	0,0694	0,0096	0,269	0,0051	0,0502	0,0088
	0,238	0,0056	0,0544	0,0096	0,268	0,0049	0,0619	0,0084	0,181	0,0046	0,0375	0,0079
	0,162	0,0056	0,0371	0,0096	0,202	0,0049	0,0467	0,0084	—	—	—	—
	—	—	—	—	0,136	0,0046	0,0335	0,0079	—	—	—	—
4	1,617	0,0162	0,1277	0,0324	1,664	0,0140	0,1343	0,0280	1,685	0,0129	0,1243	0,0258
	1,377	0,0134	0,1316	0,0268	1,379	0,0115	0,1355	0,0230	1,423	0,0099	0,1366	0,0198
	1,179	0,0117	0,1290	0,0234	1,145	0,0093	0,1392	0,0186	1,222	0,0095	0,1223	0,0190
	1,006	0,0099	0,1301	0,0198	0,957	0,0082	0,1318	0,0164	1,028	0,0088	0,1112	0,0176
	0,859	0,0092	0,1176	0,0184	0,790	0,0077	0,1159	0,0154	0,850	0,0067	0,1206	0,0134
	0,723	0,0082	0,1129	0,0164	0,634	0,0064	0,1120	0,0128	0,713	0,0065	0,1044	0,0130
	0,602	0,0067	0,1150	0,0134	0,503	0,0055	0,1035	0,0110	0,581	0,0060	0,0922	0,0120
	0,503	0,0061	0,1055	0,0122	0,391	0,0049	0,0923	0,0098	0,458	0,0048	0,0909	0,0096
	0,412	0,0060	0,0880	0,0120	0,290	0,0048	0,0684	0,0096	0,361	0,0045	0,0763	0,0090
	0,325	0,0047	0,0887	0,0094	0,193	0,0044	0,0496	0,0088	0,268	0,0041	0,0622	0,0082
	0,255	0,0046	0,0711	0,0092	—	—	—	—	0,184	0,0037	0,0473	0,0074
	0,187	0,0039	0,0615	0,0078	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,129	0,0034	0,0488	0,0068	—	—	—	—	—	—	—	—

Ta

Esperienze d' attri

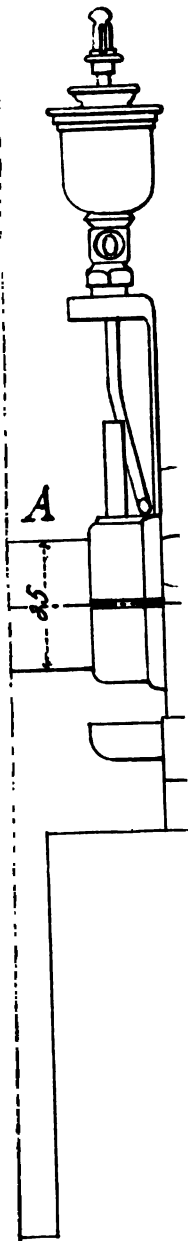
Press. p in Cg. per cm.□	Temperatura 30° Viscosità $\mu = 0{,}002741$				Temperatura 33° Viscosità $\mu = 0{,}002312$			
	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{}$
	1,567	0,0482	0,0891	0,0482	1,798	0,0457	0,0904	0,04
	0,936	0,0337	0,0761	0,0337	1,303	0,0358	0,0841	0,03
	0,594	0,0188	0,0866	0,0188	0,990	0,0280	0,0817	0,02
	0,408	0,0155	0,0722	0,0155	0,704	0,0203	0,0801	0,02
1	0,255	0,0117	0,0598	0,0117	0,498	0,0138	0,0835	0,01
	—	—	—	—	0,358	0,0130	0,0638	0,01
	—	—	—	—	0,226	0,0085	0,0616	0,00
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	1,842	0,0304	0,1660	0,0429	1,683	0,0268	0,1451	0,03
	1,471	0,0239	0,1686	0,0337	1,247	0,0198	0,1456	0,02
	1,179	0,0196	0,1649	0,0277	0,925	0,0169	0,1266	0,02
	0,940	0,0172	0,1498	0,0243	0,651	0,0111	0,1357	0,01
	0,728	0,0146	0,1366	0,0206	0,470	0,0104	0,1045	0,01
	0,550	0,0124	0,1215	0,0175	0,299	0,0080	0,0865	0,01
2	0,390	0,0103	0,1060	0,0145	0,171	0,0062	0,0638	0,00
	0,272	0,0081	0,0920	0,0114	—	—	—	—
	0,173	0,0065	0,0729	0,0091	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	1,906	0,0259	0,2015	0,0448	1,888	0,0245	0,1779	0,04
	1,574	0,0231	0,1867	0,0400	1,534	0,0238	0,1490	0,04
	1,265	0,0214	0,1620	0,0370	1,216	0,0201	0,1398	0,03
	0,980	0,0175	0,1535	0,0303	0,947	0,0150	0,1460	0,02
3	0,747	0,0132	0,1550	0,0228	0,747	0,0118	0,1464	0,02
	0,570	0,0102	0,1531	0,0176	0,589	0,0093	0,1464	0,01
	0,433	0,0086	0,1381	0,0148	0,464	0,0086	0,1247	0,01
	0,318	0,0083	0,1050	0,0143	0,348	0,0076	0,1060	0,01
	0,207	0,0077	0,0737	0,0133	0,247	0,0070	0,0817	0,01
	1,833	0,0236	0,2128	0,0472	1,878	0,0203	0,2128	0,04
	1,485	0,0202	0,2014	0,0404	1,614	0,0172	0,2170	0,03
	1,185	0,0172	0,1888	0,0344	1,390	0,0156	0,2060	0,03
	0,932	0,0128	0,1995	0,0256	1,188	0,0141	0,1951	0,02
	0,742	0,0103	0,1975	0,0206	1,000	0,0115	0,2011	0,02
	0,589	0,0095	0,1701	0,0190	0,853	0,0111	0,1778	0,02
4	0,449	0,0079	0,1558	0,0158	0,709	0,0094	0,1745	0,01
	0,331	0,0068	0,1337	0,0136	0,586	0,0079	0,1717	0,01
	0,231	0,0055	0,1150	0,0110	0,483	0,0072	0,1551	0,0
	0,148	0,0048	0,0837	0,0096	0,388	0,0065	0,1382	0,0
	—	—	—	—	0,304	0,0058	0,1211	0,0
	—	—	—	—	0,228	0,0054	0,0978	0,0
	—	—	—	—	0,157	0,0045	0,0810	0,0
	—	—	—	—	0,099	0,0045	0,0508	0,0

III

lio minerale scuro.

Temperatura 37° Viscosità $\mu = 0{,}001790$				Temperatura 40° Viscosità $\mu = 0{,}001490$			
v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$	v	f	$\mu \frac{v}{f}$	$f\sqrt{p}$
1,782	0,0430	0,0741	0,0430	1,930	0,0406	0,0718	0,0406
1,344	0,0349	0,0689	0,0349	1,518	0,0313	0,0722	0,0313
0,990	0,0277	0,0639	0,0277	1,200	0,0239	0,0748	0,0239
0,762	0,0195	0,0700	0,0195	0,957	0,0223	0,0639	0,0223
0,564	0,0138	0,0732	0,0138	0,729	0,0142	0,0765	0,0142
0,424	0,0126	0,0603	0,0126	0,585	0,0130	0,0670	0,0130
0,297	0,0093	0,0571	0,0093	0,453	0,0121	0,0558	0,0121
0,201	0,0077	0,0469	0,0077	0,330	0,0093	0,0518	0,0093
0,123	0,0056	0,0395	0,0056	0,234	0,0073	0,0479	0,0073
—	—	—	—	0,160	0,0073	0,0328	0,0073
1,704	0,0290	0,1051	0,0410	1,925	0,0257	0,1116	0,0363
1,291	0,0188	0,1230	0,0265	1,611	0,0189	0,1270	0,0267
1,023	0,0149	0,1228	0,0210	1,380	0,0180	0,1142	0,0254
0,810	0,0127	0,1142	0,0179	1,160	0,0153	0,1130	0,0216
0,629	0,0111	0,1014	0,0156	0,973	0,0133	0,1090	0,0188
0,471	0,0106	0,0795	0,0149	0,811	0,0121	0,0998	0,0171
0,351	0,0074	0,0849	0,0104	0,662	0,0112	0,0881	0,0158
0,245	0,0064	0,0685	0,0090	0,525	0,0099	0,0790	0,0140
0,153	0,0054	0,0507	0,0076	0,404	0,0083	0,0725	0,0117
—	—	—	—	0,302	0,0074	0,0609	0,0104
—	—	—	—	0,211	0,0065	0,0489	0,0919
—	—	—	—	0,133	0,0065	0,0302	0,0919
1,546	0,0237	0,1167	0,0410	1,874	0,0208	0,1342	0,0360
1,230	0,0187	0,1177	0,0323	1,478	0,0166	0,1326	0,0287
0,980	0,0145	0,1210	0,0251	1,161	0,0118	0,1466	0,0204
0,787	0,0130	0,1083	0,0225	0,953	0,0102	0,1366	0,0176
0,612	0,0113	0,0970	0,0195	0,740	0,0090	0,1226	0,0151
0,462	0,0902	0,0918	0,0155	0,569	0,0079	0,1073	0,0136
0,341	0,0084	0,0727	0,0145	0,417	0,0077	0,0807	0,0133
0,234	0,0077	0,0545	0,0133	0,270	0,0074	0,0544	0,0128
—	—	—	—	—	—	—	—
1,831	0,0185	0,1772	0,0370	1,823	0,0159	0,1709	0,0318
1,591	0,0157	0,1813	0,0314	1,501	0,0142	0,1575	0,0284
1,386	0,0147	0,1734	0,0286	1,213	0,0119	0,1519	0,0238
1,199	0,0130	0,1651	0,0260	0,971	0,0093	0,1557	0,0186
1,030	0,0125	0,1474	0,0250	0,782	0,0083	0,1405	0,0166
0,867	0,0098	0,1583	0,0196	0,613	0,0072	0,1269	0,0144
0,740	0,0085	0,1558	0,0170	0,466	0,0066	0,1052	0,0132
0,629	0,0075	0,1443	0,0156	0,332	0,0053	0,0935	0,0106
0,528	0,0072	0,1312	0,0144	0,224	0,0046	0,0728	0,0092
0,433	0,0065	0,1194	0,0130	—	—	—	—
0,351	0,0065	0,0966	0,0130	—	—	—	—
0,206	0,0050	0,0952	0,0100	—	—	—	—
0,200	0,0047	0,0762	0,0094	—	—	—	—
0,139	0,0043	0,0578	0,0086	—	—	—	—

PERIN





[illegible] vedute nelle
ricerche teoriche ed
esperimentali
sull'attrito.